

Bölüm 0: Hazırlık

Oyun Kuramı İçin Gerekli Matematik

Küme ve fonksiyon

Σ , max, argmax

Olasılık ve beklenen değer

Karışık strateji

Kazanç matrisi

En iyi tepki

Kayıtsızlık denklemi

Oyun ağacı

Sercan KÜLCÜ · Giresun Üniversitesi · Bilgisayar Mühendisliği

GİRİŞ

Oyunla Başlangıç: Taş-Kağıt-Makas

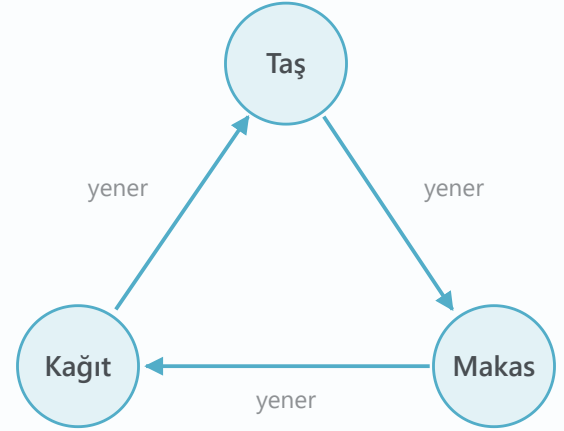
İki oyuncu aynı anda **Taş**, **Kağıt** ya da **Makas** seçer: Taş Makas'ı, Makas Kağıt'ı, Kağıt Taş'ı yener; aynı seçim berabere biter. Kazanan 1 puan alır, kaybeden 1 puan verir.

Taş-Kağıt-Makas oyunu bilgisayara karşı oynanır; rakip rastgele oynayabilir ya da hamlelerinizin *sıklığını* veya *örüntüsünü* öğrenebilir.

Merak soruları

Sizce öğrenen bir bilgisayarın sizi uzun vadede yenemeyeceği bir oynayış var mı?

Hep Taş oynayan biri, rakibi bunu fark edince tur başına ortalama kaç puan kaybeder?



Öğrenme Çıktıları

Gösterim

Küme, Kartezyen çarpım ve $u_1(s_1, s_2)$ gibi fonksiyon gösterimini okumak.

Σ , max, argmax

Bir toplamı açıp hesaplamak; en büyük değeri ve onu veren seçeneği ayırmak.

Olasılık

Eşit olası sonuçları sayarak ve bağımsız olayları çarparak olasılık bulmak.

Beklenen değer

Bir piyangoonun ve karışık stratejinin beklenen kazancını hesaplamak.

Matris ve en iyi tepki

(a, b) çiftini doğru okumak, en iyi tepkileri matriste işaretlemek.

Denklem ve ağaç

Kayıtsızlık denklemini çözmek; oyun ağacını yapraktan köke çözmek.

Küme ve Kartezyen Çarpım

Sezgi: Küme, seçeneklerin listesidir; iki kümenin **Kartezyen çarpımı** ise "birinciden bir, ikinciden bir" seçilerek kurulabilecek tüm *sıralı* çiftlerdir.

Çalışılmış örnek

Ayşe'nin strateji kümesi $S_1 = \{\text{Taş}, \text{Kağıt}, \text{Makas}\}$;
 $\text{Taş} \in S_1$ ("Taş, S_1 'in elemanı"), eleman sayısı $|S_1| = 3$.

Burak'ınki de $S_2 = \{\text{Taş}, \text{Kağıt}, \text{Makas}\}$. Oyunun tüm olası sonuçları $S_1 \times S_2$ kümesidir: $|S_1 \times S_2| = 3 \cdot 3 = 9$ çift. Her çiftte **strateji profili** denir.

		Burak		
		Taş	Kağıt	Makas
Ayşe	Taş	(Taş, Taş)	(Taş, Kağıt)	(Taş, Makas)
	Kağıt	(Kağıt, Taş)	(Kağıt, Kağıt)	(Kağıt, Makas)
	Makas	(Makas, Taş)	(Makas, Kağıt)	(Makas, Makas)

Sık hata: (Taş, Kağıt) ile (Kağıt, Taş) aynı sanılır. Çiftte sıra önemlidir: ilk eleman Ayşe'nin, ikinci eleman Burak'ın seçimidir. Biri Ayşe'nin, diğeri Burak'ın kazandığı iki ayrı sonuçtur (şekilde turuncu hücreler).

Fonksiyon Gösterimi

Sezgi: Fonksiyon bir makinedir: girdiyi alır, *tek bir* çıktı verir. Kazanç fonksiyonu u_i , bir strateji profilini alıp i . oyuncunun kazancını (bir sayı) verir.

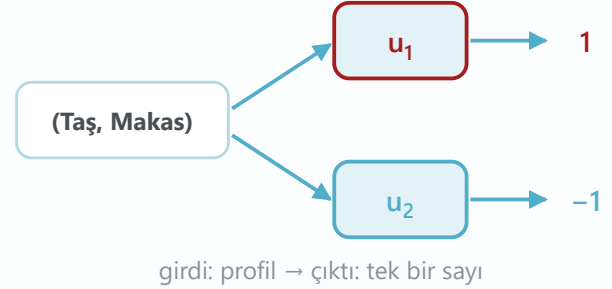
Çalışılmış örnek (Taş-Kağıt-Makas)

$u_1(\text{Taş, Makas}) = 1$: Ayşe Taş, Burak Makas oynarsa Ayşe 1 puan alır.

$u_2(\text{Taş, Makas}) = -1$: *aynı* profilde Burak 1 puan verir.

$u_1(\text{Kağıt, Kağıt}) = 0$: berabere.

Yazım: $u_1 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ("profilden gerçek sayıya").



Sık hata: $u_1(\text{Taş, Kağıt})$ değerini "Kağıt kazanır" diye okumak. Fonksiyonun değeri bir sayıdır: $u_1(\text{Taş, Kağıt}) = -1$. Alt indis kimin kazancına baktığımızı söyler; u_1 ile u_2 aynı profilde farklı sayılar verir.

Toplam Sembolü Σ

Sezgi: Σ "hepsini topla" demektir. Altındaki sayı nereden başlayacağını, üstündeki nerede duracağını söyler: $\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3$.

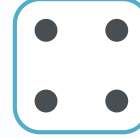
Çalışılmış örnek: üç zar atışı

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 4 + 1 + 6 = 11$$

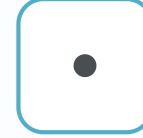
Adil zarda her yüzün olasılığı $1/6$: $\sum_{i=1}^6 p_i = 6 \cdot 1/6 =$

1. Olasılıkların toplamı her zaman 1'dir.

Beklenen değer de bir toplamdır: $\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$.



$$x_1 = 4$$



$$x_2 = 1$$



$$x_3 = 6$$

Sık hata: Kareyi toplamın dışına taşımak. $(\sum x_i)^2$ ile $\sum x_i^2$ farklıdır: $(4 + 1 + 6)^2 = 121$, ama $4^2 + 1^2 + 6^2 = 53$. Önce Σ 'nin içindeki ifadeyi her i için hesapla, sonra topla.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

max ve argmax

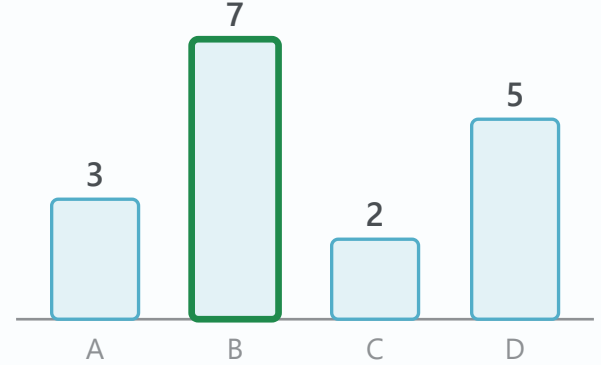
Sezgi: **max** "en büyük değer kaç?" sorusunu, **argmax** "en büyük değeri *hangi* seçenek veriyor?" sorusunu cevaplar. Oyun kuramında oyuncu bir değer değil, bir eylem seçer; bu yüzden argmax daha sık kullanılır.

Çalışılmış örnek: kart seçimi

Dört kapalı karttan birini seçiyorsun; kartların ödülleri A: 3, B: 7, C: 2, D: 5 jeton.

$\max\{3, 7, 2, 5\} = 7$ (bir sayı)

$\operatorname{argmax} = \mathbf{B}$ (bir seçenek): "B'yi seç".



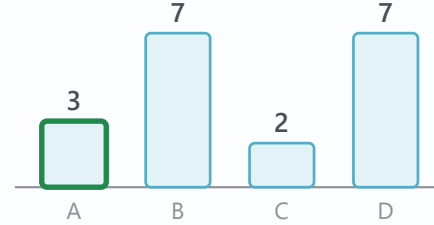
Sık hata: argmax yerine değeri yazmak (" $\operatorname{argmax} = 7$ ") ya da tersi. İkinci tuzak eşitliktir: ödüller 3, 7, 2, 7 olsaydı argmax tek bir eleman değil, {B, D} kümesi olurdu; ikisi de en iyi seçimdir.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
▶ eylem = ["A", "B", "C", "D"]
▶ kazanc = [3, 7, 2, 7]
▶ en_iyi = 0 # en iyinin indisi

4 for i in range(1, 4):
5     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



Başlangıç: ilk kartı (A, 3 jeton) şimdilik en iyi kabul et.

Adım 1 / 6

DEĞİŞKENLER

i = -

en_iyi = 0

kazanc[en_iyi] = 3

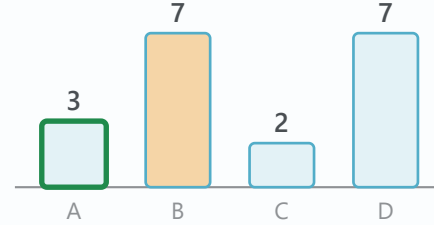
ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0 # en iyinin indisi
▶ for i in range(1, 4):
▶     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



i = 1: kazanc[1] = 7 > 3 mü? **Evet.**

Adım 2 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 1

en_iyi = 0

kazanc[en_iyi] = 3

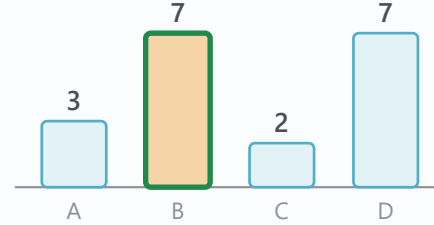
ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0 # en iyinin indisi
4 for i in range(1, 4):
5     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



en_iyi = 1: yeni en iyi B (7 jeton).

Adım 3 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 1

en_iyi = 1

kazanc[en_iyi] = 7

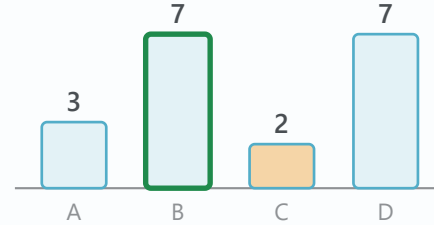
ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0 # en iyinin indisi
▶ for i in range(1, 4):
▶     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



i = 2: kazanc[2] = 2 > 7 mü? Hayır, en iyi değişmez.

Adım 4 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 2

en_iyi = 1

kazanc[en_iyi] = 7

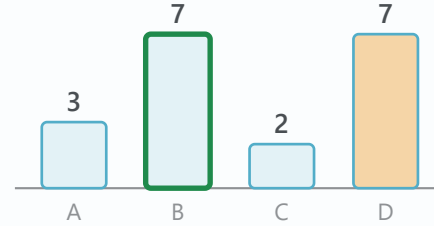
ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0 # en iyinin indisi
▶ for i in range(1, 4):
▶     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



$i = 3$: $7 > 7$ mü? **Hayır**: eşitlikte kesin " $>$ " ilk bulunanı tutar.

Adım 5 / 6

DEĞİŞKENLER

$i = 3$

$en_iyi = 1$

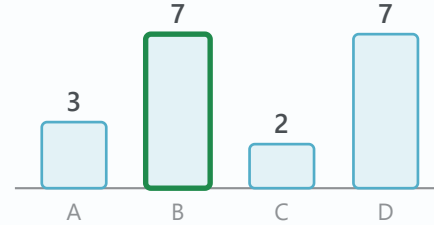
$kazanc[en_iyi] = 7$

ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0 # en iyinin indisi
4 for i in range(1, 4):
5     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
▶ print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



max = 7, kod argmax olarak **B** verir; D de 7 verdiği için argmax kümesi aslında {B, D}.

Adım 6 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 3

en_iyi = 1

kazanc[en_iyi] = 7

ÇIKTI

7 B

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

Olasılık: Sayarak Hesaplamak

Sezgi: Sonuçlar eşit olasıysa $P(\text{olay}) = \text{istenen sonuç sayısı} / \text{tüm sonuç sayısı}$. Bağımsız olaylar (birbirini etkilemeyen atışlar) için olasılıklar **çarpılır**.

Çalışılmış örnekler

Zarda çift gelme: $\{2, 4, 6\} \rightarrow 3/6 = \mathbf{1/2}$.

İki yazı-turada iki yazı: $1/2 \cdot 1/2 = \mathbf{1/4}$.

İki zarda en az bir 6: tümleyenle hesapla. Hiç 6 gelmemesi $(5/6) \cdot (5/6) = 25/36$, o hâlde $1 - 25/36 = \mathbf{11/36}$. Tabloda 11 turuncu hücre.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Sık hata: "İki zarda en az bir 6" için $1/6 + 1/6 = 12/36$ demek. Bu toplam (6, 6) sonucunu iki kez sayar; doğru cevap 11/36. Olasılıklar ancak olaylar aynı anda olamıyorsa toplanır.

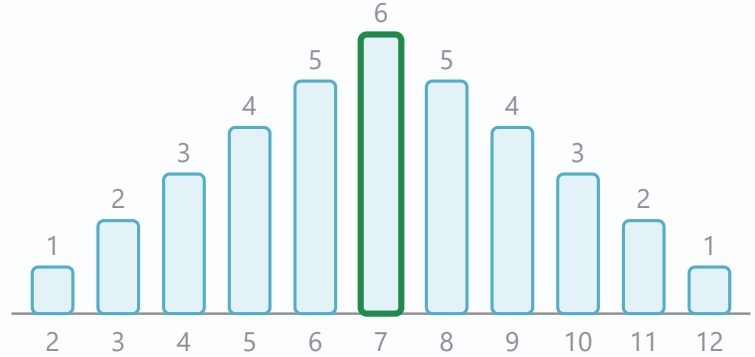
Olasılık Dağılımı

Sezgi: Olasılık dağılımı, her olası sonuca bir olasılık yazan bir tablodur. Her olasılık 0 ile 1 arasındadır ve hepsinin toplamı 1'dir.

Çalışılmış örnek: iki zarın toplamı

36 eşit olası sonuç var. Toplam 7'yi veren çiftler (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1): $P(7) = \frac{6}{36}$. Toplam 2 yalnızca (1,1) ile olur: $P(2) = \frac{1}{36}$.

Kontrol: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$, yani toplam olasılık $36/36 = 1$.



Sık hata: Her toplamı eşit olası sanmak ("11 farklı toplam var, her biri 1/11"). Sonuçlar (zar çiftleri) eşit olasıdır, toplamalar değil. Çubukların üstündeki sayılar 36 sonuçtan kaçının o toplamı verdiğini gösterir.

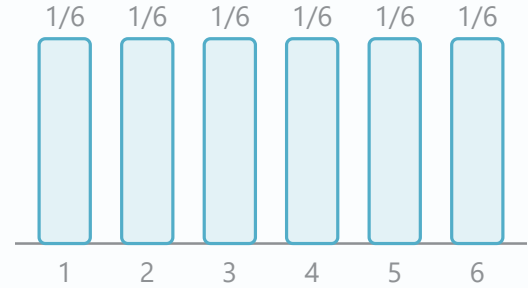
Beklenen Değer

Sezgi: Beklenen değer, aynı rastgele deney çok kez tekrarlansaydı **tur başına ortalama** ne elde edeceğimizdir: her sonucu olasılığıyla çarp, topla.

$$E[X] = \sum_x x \cdot P(X = x)$$

Çalışılmış örnek: adil zar

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \cdot (1/6) + 2 \cdot (1/6) + 3 \cdot (1/6) + 4 \cdot (1/6) + 5 \cdot (1/6) \\ &\quad + 6 \cdot (1/6) \\ &= 21/6 = \mathbf{3,5} \end{aligned}$$



Sık hata: Beklenen değeri "en olası sonuç" ya da "kesin gelecek sonuç" sanmak. Zarda 3,5 hiç gelmez; 3,5 yalnızca çok sayıda atışın ortalamasıdır. Kazancı 0 ya da 100 olan bir piyango'nun beklenen değeri 30 olabilir ama piyango hiçbir zaman 30 ödemez.

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
▶ odul = [100, 20, 0]          # TL
▶ olas = [0.05, 0.25, 0.70]
▶ E = 0

4 for i in range(3):
5     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
7 print("net =", E - 12) # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	...
i = 1	20 TL	0,25	...
i = 2	0 TL	0,70	...

E = 0

Üç ödül ve olasılıkları; toplam olasılık $0,05 + 0,25 + 0,70 = 1$. Toplayıcı $E = 0$.

Adım 1 / 6

DEĞİŞKENLER

i = - E = 0

ÇIKTI



İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
▶ for i in range(3):
▶     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
7 print("net =", E - 12) # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	...
i = 2	0 TL	0,70	...

E = 5

$100 \cdot 0,05 = 5$ eklenir: $E = 5$.

Adım 2 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 0

odul[i] = 100

olas[i] = 0.05

E = 5.0

ÇIKTI

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
▶ for i in range(3):
▶     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
7 print("net =", E - 12) # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	...

E = 10

$20 \cdot 0,25 = 5$ eklenir: $E = 10$.

Adım 3 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 1 odul[i] = 20 olas[i] = 0.25
E = 10.0

ÇIKTI

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
▶ for i in range(3):
▶     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
7 print("net =", E - 12) # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	0

E = 10

$0 \cdot 0,70 = 0$: boş bilet E'yi değiştirmez ama olasılığı yine sayılır.

Adım 4 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 2

odul[i] = 0

olas[i] = 0.7

E = 10.0

ÇIKTI



İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
4 for i in range(3):
5     E = E + odul[i] * olas[i]
6     print("E =", E)
7 print("net =", E - 12) # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	0

E = 10

Bir biletin beklenen ödülü **10 TL**.

Adım 5 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 2

E = 10.0

ÇIKTI

E = 10.0

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
4 for i in range(3):
5     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
▶ print("net =", E - 12) # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	0

E = 10

Bilet 12 TL: net beklenen kazanç $10 - 12 = -2$ TL.

Çok kez oynayan, bilet başına ortalama 2 TL kaybeder.

Adım 6 / 6

DEĞİŞKENLER

i = 2

E = 10.0

ÇIKTI

E = 10.0

net = -2.0

Örnek: Bu Zar Oyunu Oynanır mı?

Panayırdada bir oyun: **10 TL** ödeyip bir zar atıyorsun. **6** gelirse 40 TL, **5** gelirse 10 TL alıyorsun; başka bir sayıda hiçbir şey almıyorsun.

Zar	Ödül x	P(x)	x · P(x)
6	40	1/6	40/6
5	10	1/6	10/6
1, 2, 3, 4	0	4/6	0
Toplam		6/6 = 1	50/6 ≈ 8,33

Sonuç

Beklenen ödül $\approx 8,33$ TL, giriş 10 TL: net $\approx -1,67$ TL her oyunda. Risk umursanmıyorsa oynamak kârlı değil.

Ne olsaydı adil olurdu?

6 için ödül y olsun: $(y + 10)/6 = 10 \Rightarrow y = 50$ TL.
Bu, tek bilinmeyenli bir denklemdir.

Sık hata: "Kazanma şansım 2/6, fena değil" diye karar vermek. Kazanma olasılığı tek başına yetmez; ödüllerin büyüklüğü ve giriş ücreti de hesaba girer. Karar, net beklenen değere göre verilir.

KARIŞIK STRATEJİ

Karışık Strateji Fikri

Sezgi: Karışık strateji (mixed strategy), oyuncunun kendi eylemleri üzerine koyduğu bir olasılık dağılımıdır: "Hangi hamleyi yapacağımı bir zar/para karar versin."

Çalışılmış örnek

Zar at: 1–2 → Taş, 3–4 → Kağıt, 5–6 → Makas. Bu, $(1/3, 1/3, 1/3)$ karışık stratejisidir.

Yazı-tura at, yazıda Taş; turada ikinci bir yazı-tura ile Kağıt ya da Makas: $(1/2, 1/4, 1/4)$.

Tek bir eylemi kesin oynamak **saf strateji**dir: $(1, 0, 0)$ = hep Taş.

Eşit	T 1/3	K 1/3	M 1/3
------	-------	-------	-------

Yanlı	T 1/2	K 1/4	M 1/4
-------	-------	-------	-------

her çubuğun toplam uzunluğu = 1

Sık hata: Karışık stratejiyi "sırayla değiştirmek" sanmak (Taş, Kağıt, Makas, Taş, ...). Bu düzen tahmin edilebilir ve kolayca yenilir. Karışık stratejide her turda *tek bir* saf hamle oynanır; hangisinin oynanacağı rastgele seçilir.

KARIŞIK STRATEJİ

Karışık Stratejiye Karşı Beklenen Kazanç

Burak (1/2 Taş, 1/4 Kağıt, 1/4 Makas) oynuyor. Ayşe'nin her saf hamlesinin beklenen kazancı: tablodaki satırı Burak'ın olasılıklarıyla çarp ve topla.

Ayşe ↓ / Burak →	Taş (1/2)	Kağıt (1/4)	Makas (1/4)	Beklenen kazanç
Taş	0	-1	+1	$0 - 1/4 + 1/4 = 0$
Kağıt	+1	0	-1	$1/2 + 0 - 1/4 = 1/4$
Makas	-1	+1	0	$-1/2 + 1/4 + 0 = -1/4$

argmax = **Kağıt**: Taş ağırlıklı bir rakibe karşı Kağıt tur başına ortalama 1/4 puan kazandırır. Beklenen değer + argmax birlikte "en iyi tepki" verir.

Sık hata: Yalnızca rakibin en sık hamlesine bakmak. Burak (0,4 Taş, 0,25 Kağıt, 0,35 Makas) oynasaydı Taş'ı yenen Kağıt $0,4 - 0,35 = 0,05$ getirirdi; Taş ise $-0,25 + 0,35 = 0,10$ getirir. Her satırın beklenen değerini hesaplamadan karar verme.

KAZANÇ MATRİSİ

Kazanç Matrisini Okumak

Sezgi: Satırları **satır oyuncusu**, sütunları **sütun oyuncusu** seçer; ikisinin kesiştiği hücre oyunun sonucudur. Hücredeki (a, b): **a** satır, **b** sütun oyuncusunun kazancı.

		Burak (tahmin)	
		Kırmızı	Siyah
Ayşe (kart)	Kırmızı	(-3 , 3)	(1 , -1)
	Siyah	(1 , -1)	(-1 , 1)

Çalışılmış örnek: Kart Gösterme

Ayşe elinde kırmızı ya da siyah bir kart tutar; Burak rengi tahmin eder. Burak kırmızıyı bilirse Ayşe'den 3, siyahı bilirse 1 jeton alır; yanılırsa Ayşe'ye 1 jeton verir. (Kırmızı, Kırmızı) = (-3, 3): Ayşe kırmızı tuttu, Burak bildi; Ayşe 3 verir, Burak 3 alır. Her hücrede $a + b = 0$: oyun **sıfır toplamıdır**.

Sık hata: b sayısını satır oyuncusunun kazancı sanmak ya da Ayşe'nin sonucu tek başına seçtiğini düşünmek. Ayşe yalnızca *satırı* seçer; hangi hücreye düşeceğini Burak'ın sütunu belirler.

KAZANÇ MATRİSİ

Matrisi Okuma Alıştırması

		Burak (tahmin)	
		Kırmızı	Siyah
Ayşe (kart)	Kırmızı	(-3 , 3)	(1 , -1)
	Siyah	(1 , -1)	(-1 , 1)

1. Ayşe Siyah tutar, Burak "Kırmızı" derse kim kaç jeton alır?
2. Ayşe Siyah tutarken Burak'ın alabileceği kazançlar hangileri?
3. Burak her turda "Kırmızı" diyorsa Ayşe hangi kartı tutmalı?
4. Oyunda Ayşe'nin alabileceği en büyük ve en küçük kazanç kaç?

► Cevapları göster

En İyi Tepki Sezgisi

Sezgi: "Rakibin ne yapacağını bilseydim ne yapardım?" sorusunun cevabı **en iyi tepkidir** (best response). Rakibin seçimini sabitle, *kendi* kazançlarına bak, argmax 'ı al.

Çalışılmış örnek: Kart Gösterme

Burak hep "Kırmızı" der: Ayşe'nin sütundaki ilk sayıları Kırmızı -3 , Siyah $1 \Rightarrow$ en iyi tepki **Siyah**.

Burak hep "Siyah" der: Kırmızı 1 , Siyah $-1 \Rightarrow$ en iyi tepki **Kırmızı**.

Burak karıştırıyorsa: her satırın beklenen kazancını hesapla, büyüğünü seç.

		Burak (tahmin)	
		Kırmızı	Siyah
Ayşe (kart)	Kırmızı	(-3 , 3)	(1 , -1)
	Siyah	(1 , -1)	(-1 , 1)

Sık hata: En iyi tepkiyi seçerken rakibin kazancına (ikinci sayıya) bakmak. Ayşe yalnızca kendi sayılarını karşılaştırır. Ayrıca en iyi tepki sabit değildir: rakip değişince değişebilir.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

		Burak	
		Sol	Sağ
Ayşe	Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
	Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

Ayşe satırı (Yukarı/Aşağı), Burak sütunu (Sol/Sağ) seçer. Henüz işaret yok.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

		Burak	
		Sol	Sağ
Ayşe	Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
	Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

Burak **Sol** oynarsa Ayşe ilk sayıları karşılaştırır: Yukarı 1, Aşağı 2 $\Rightarrow$ **Aşağı**; 2 işaretlenir.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

		Burak	
		Sol	Sağ
Ayşe	Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
	Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

Burak **Sağ** oynarsa: Yukarı 3, Aşağı 0 $\Rightarrow$ **Yukarı**; 3 işaretlenir.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

		Burak	
		Sol	Sağ
Ayşe	Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
	Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

Ayşe **Yukarı** oynarsa Burak ikinci sayıları karşılaştırır: Sol 2, Sağ 1 $\Rightarrow$ **Sol**.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

		Burak	
		Sol	Sağ
Ayşe	Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
	Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

Ayşe **Aşağı** oynarsa: Sol 3, Sağ 0 ⇒ **Sol**. Burak için Sol her durumda daha iyi.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

		Burak	
		Sol	Sağ
Ayşe	Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
	Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

İki sayısı da işaretli tek hücre **(Aşağı, Sol) = (2, 3)**: ikisi de en iyi tepkisini oynuyor, kimse tek başına değiştirmek istemez. Bu özelliğe **Nash dengesi** denir.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

Sezgi: İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Çalışılmış örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

$$(1) 2z + d = 50 \quad (2) z + d = 35 \quad z: \text{zar}, d: \text{deste fiyatı}$$

Adım 1 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3, x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğun değerleri her iki denklemde de kontrol et.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

Sezgi: İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Çalışılmış örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

$$(1) 2z + d = 50 \quad (2) z + d = 35 \quad z: \text{zar}, d: \text{deste fiyatı}$$

$$(1) - (2): (2z + d) - (z + d) = 50 - 35 \Rightarrow z = 15$$

Adım 2 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3, x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğun değerleri her iki denklemde de kontrol et.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

Sezgi: İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Çalışılmış örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

$$(1) 2z + d = 50 \quad (2) z + d = 35 \quad z: \text{zar}, d: \text{deste fiyatı}$$

$$(1) - (2): (2z + d) - (z + d) = 50 - 35 \Rightarrow z = 15$$

$$(2)'de \text{ yerine koy: } 15 + d = 35 \Rightarrow d = 20$$

Adım 3 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3, x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğün değerleri her iki denklemde de kontrol et.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

Sezgi: İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Çalışılmış örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

$$(1) 2z + d = 50 \quad (2) z + d = 35 \quad z: \text{zar}, d: \text{deste fiyatı}$$

$$(1) - (2): (2z + d) - (z + d) = 50 - 35 \Rightarrow z = 15$$

$$(2)'de \text{ yerine koy: } 15 + d = 35 \Rightarrow d = 20$$

$$\text{Kontrol (1): } 2 \cdot 15 + 20 = 50 \checkmark$$

Adım 4 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3, x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğın değerleri her iki denklemde de kontrol et.

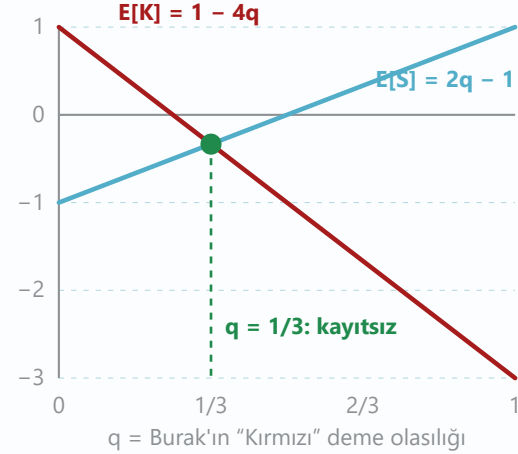
Kayıtsızlık Fikri

Sezgi: Bir oyuncu iki eylemi arasında gerçekten karıştırıyorsa iki eylem ona **eşit** beklenen kazanç vermelidir; biri daha iyi olsaydı hep onu oynardı. Buna **kayıtsızlık** denir.

Kart Gösterme'de

Burak "Kırmızı"yı q olasılıkla derse Ayşe için $E[K] = 1 - 4q$, $E[S] = 2q - 1$.

$q < 1/3$: Kırmızı daha iyi. $q > 1/3$: Siyah daha iyi. Yalnız $q = 1/3$ 'te Ayşe kayıtsızdır.



Sık hata: Ayşe'nin kendi olasılığını kendi kayıtsızlık denkleminde bulmaya çalışmak. Ayşe'nin kayıtsızlığı *Burak'ın* q değerini belirler; Ayşe'nin p değeri Burak'ı kayıtsız bırakan denklemden çıkar.

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

		Burak	
		"K"	"S"
Ayşe	K	(-3 , 3)	(1 , -1)
	S	(1 , -1)	(-1 , 1)

Burak "Kırmızı"yı q , "Siyah"ı $1 - q$ olasılıkla desin (toplam 1).

Adım 1 / 7

p : Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q : Burak'ın "Kırmızı" deme olasılığı.

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

	Burak	
	"K"	"S"
Ayşe	K (-3 , 3)	(1 , -1)
	S (1 , -1)	(-1 , 1)

Burak "Kırmızı"yı q , "Siyah"ı $1 - q$ olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 4q$

Adım 2 / 7

p : Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q : Burak'ın "Kırmızı" deme olasılığı.

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

		Burak	
		"K"	"S"
Ayşe	K	(-3 , 3)	(1 , -1)
	S	(1 , -1)	(-1 , 1)

Burak "Kırmızı"yı q , "Siyah"ı $1 - q$ olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 4q$

Ayşe Siyah tutarsa: $E[S] = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = 2q - 1$

Adım 3 / 7

p : Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q : Burak'ın "Kırmızı" deme olasılığı.

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

	Burak	
	"K"	"S"
Ayşe	K (-3 , 3)	(1 , -1)
	S (1 , -1)	(-1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Burak'ın "Kırmızı" deme olasılığı.

Burak "Kırmızı"yı q , "Siyah"ı $1 - q$ olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 4q$

Ayşe Siyah tutarsa: $E[S] = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = 2q - 1$

Kayıtsızlık: $1 - 4q = 2q - 1 \Rightarrow 2 = 6q \Rightarrow q = 1/3$

Adım 4 / 7

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

		Burak	
		"K"	"S"
Ayşe	K	(-3 , 3)	(1 , -1)
	S	(1 , -1)	(-1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Burak'ın "Kırmızı" deme olasılığı.

Burak "Kırmızı"yı q , "Siyah"ı $1 - q$ olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 4q$

Ayşe Siyah tutarsa: $E[S] = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = 2q - 1$

Kayıtsızlık: $1 - 4q = 2q - 1 \Rightarrow 2 = 6q \Rightarrow q = 1/3$

Kontrol: $E[K] = 1 - 4/3 = -1/3$ ve $E[S] = 2/3 - 1 = -1/3 \checkmark$

Adım 5 / 7

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

		Burak	
		"K"	"S"
Ayşe	K	(-3 , 3)	(1 , -1)
	S	(1 , -1)	(-1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Burak'ın "Kırmızı" deme olasılığı.

Burak "Kırmızı"yı q , "Siyah"ı $1 - q$ olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 4q$

Ayşe Siyah tutarsa: $E[S] = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = 2q - 1$

Kayıtsızlık: $1 - 4q = 2q - 1 \Rightarrow 2 = 6q \Rightarrow q = 1/3$

Kontrol: $E[K] = 1 - 4/3 = -1/3$ ve $E[S] = 2/3 - 1 = -1/3 \checkmark$

Burak için aynı yol: $E["K"] = 3p - (1 - p) = 4p - 1$, $E["S"] = -p + (1 - p) = 1 - 2p \Rightarrow 4p - 1 = 1 - 2p \Rightarrow p = 1/3$

Adım 6 / 7

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

		Burak	
		"K"	"S"
Ayşe	K	(-3 , 3)	(1 , -1)
	S	(1 , -1)	(-1 , 1)

p : Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q : Burak'ın "Kırmızı" deme olasılığı.

Burak "Kırmızı"yı q , "Siyah"ı $1 - q$ olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 4q$

Ayşe Siyah tutarsa: $E[S] = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = 2q - 1$

Kayıtsızlık: $1 - 4q = 2q - 1 \Rightarrow 2 = 6q \Rightarrow q = 1/3$

Kontrol: $E[K] = 1 - 4/3 = -1/3$ ve $E[S] = 2/3 - 1 = -1/3 \checkmark$

Burak için aynı yol: $E["K"] = 3p - (1 - p) = 4p - 1$, $E["S"] = -p + (1 - p) = 1 - 2p \Rightarrow 4p - 1 = 1 - 2p \Rightarrow p = 1/3$

Sonuç: Ayşe kırmızıyı 1/3, Burak "Kırmızı"yı 1/3 olasılıkla seçer; Ayşe tur başına ortalama **1/3 jeton** kaybeder.

Oyuna Dönüş: Taş-Kağıt-Makas

Yenilmeyen oynayıp var mı?

Evet: $(1/3, 1/3, 1/3)$. Rakip ne oynarsa oynasın beklenen kazanç 0'dır; örneğin rakip Kağıt: $1/3 \cdot (-1) + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot (+1) = 0$. Üç hamle de kayıtsız olduğu için sömürülecek bir taraf kalmaz.

Hep Taş oynayan ne kaybeder?

Rakibin en iyi tepkisi hep Kağıt: tur başına -1 . Daha hafif bir yanlılık da kaybettirir: $(1/2, 1/4, 1/4)$ oynayana karşı Kağıt, $1/2 \cdot (-1) + 1/4 \cdot 0 + 1/4 \cdot (+1) = -1/4$ getirir.

Senin karışımın (T, K, M)	Rakibin en iyi tepkisi	Senin beklenen kazancın
(1, 0, 0): hep Taş	Kağıt	-1
(1/2, 1/4, 1/4)	Kağıt	-1/4
(1/3, 1/3, 1/3)	hepsi eşit	0

İnsanlar nasıl oynuyor? Laboratuvar deneylerinde üç hamlenin toplam sıklığı $1/3$ 'e yakın çıksa da ardışık hamleler bağımsız değildir: kazanan aynı hamleyi tekrarlamaya, kaybeden hamlesini değiştirmeye eğilimlidir (Wang, Xu ve Zhou, 2014). Örüntü öğrenen bir rakip tam olarak bunu sömürür.

Oyun Ağacını Okumak

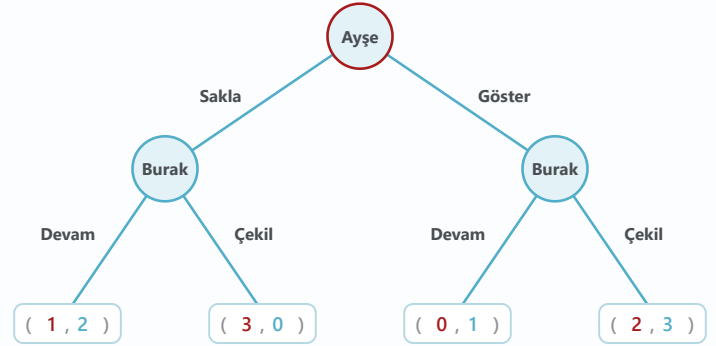
Sezgi: Sıralı oyunlarda **oyun ağacı** kullanılır: daire içindeki düğüm sıranın kimde olduğunu, dallar eylemleri, alttaki **yapraklar** oyun bitince (Ayşe, Burak) kazançlarını gösterir.

Çalışılmış örnek

Ayşe kartını saklar ya da gösterir. Burak, Ayşe'nin ne yaptığını *görerek* devam eder ya da çekilir.

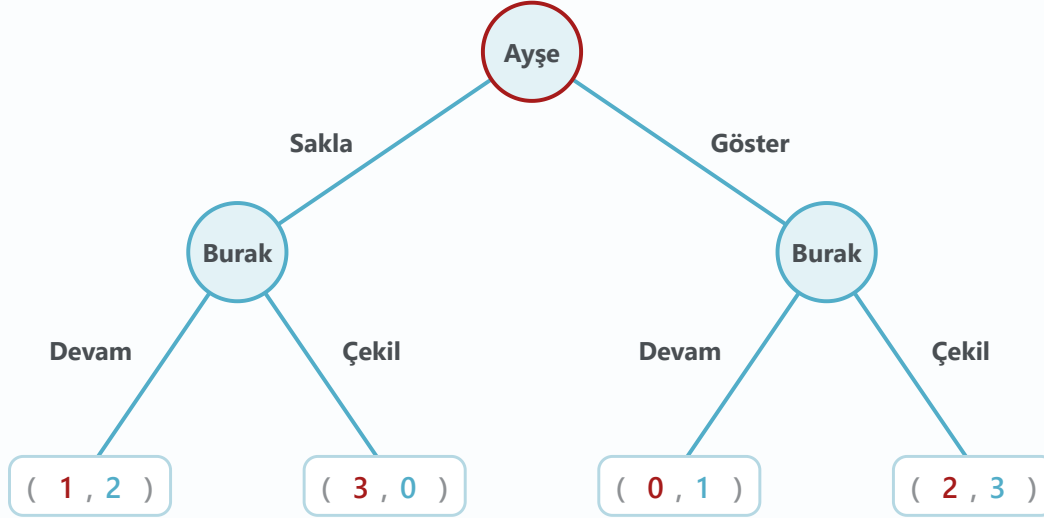
Yol Sakla → Çekil: yaprak (3, 0); Ayşe 3, Burak 0 alır.

Burak'ın iki düğümü vardır; her birinde ayrı karar verir.



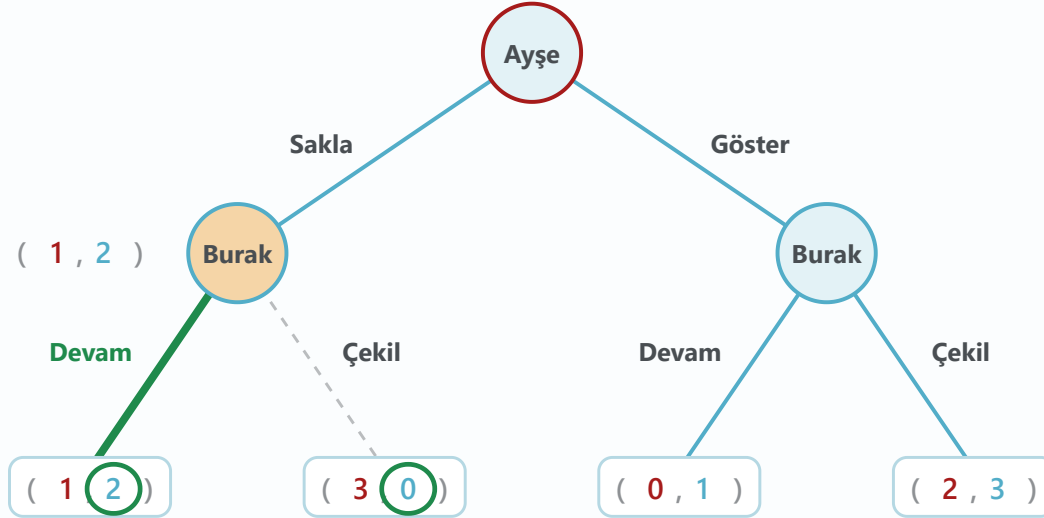
Sık hata: Yapraktaki sırayı karıştırmak: ilk sayı ilk hamleyi yapan oyuncunun (Ayşe), ikinci sayı Burak'ın kazancıdır. Bir de matristen farkı unutmak: burada Burak, Ayşe'nin hamlesini *görür*.

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



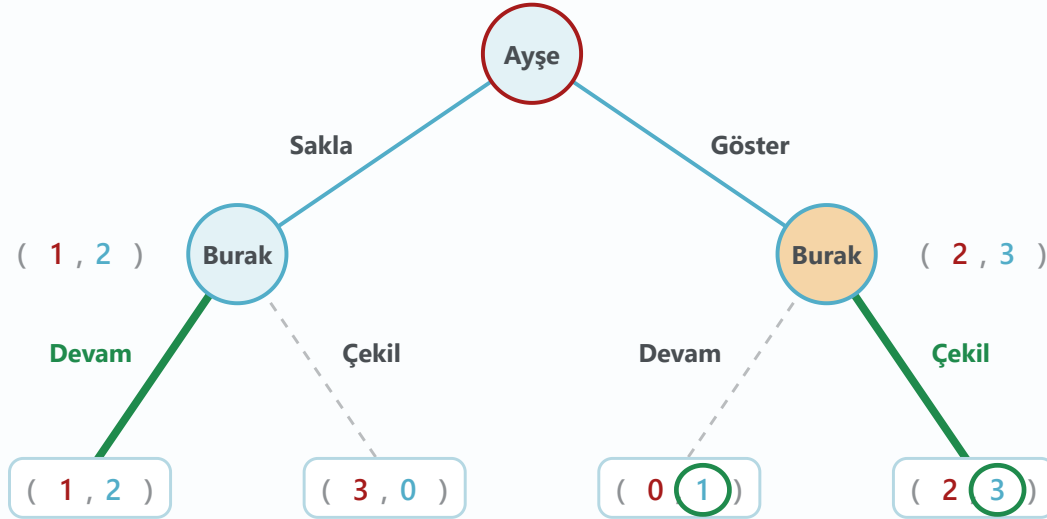
Fikir: **son** hamleyi yapandan başla. Burak'ın her düğümde ne seçeceği belli olunca Ayşe'nin kararı kolaylaşır.

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



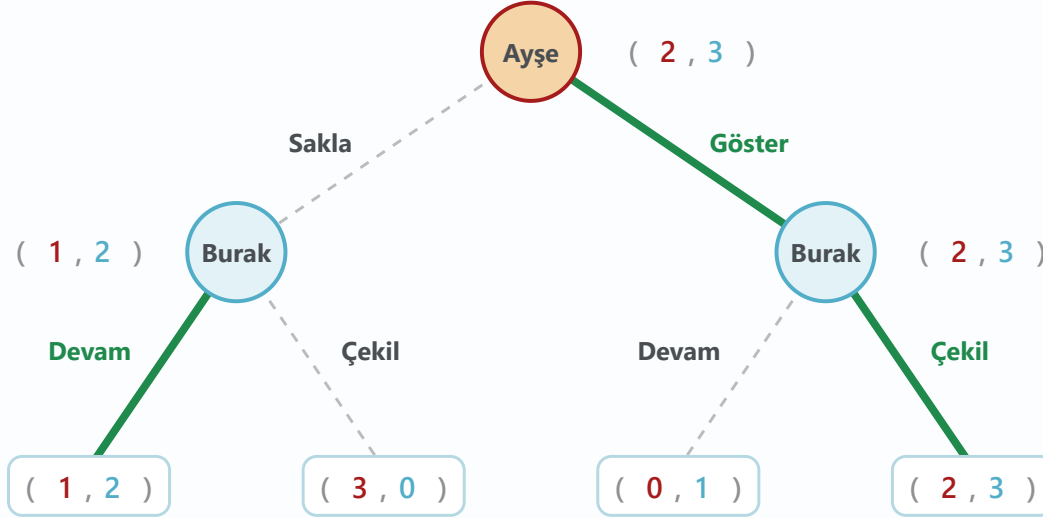
Sakla'dan sonra Burak ikinci sayıları karşılaştırır: Devam 2, Çekil 0 $\Rightarrow$ **Devam**. Bu düğümün değeri (1, 2).

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



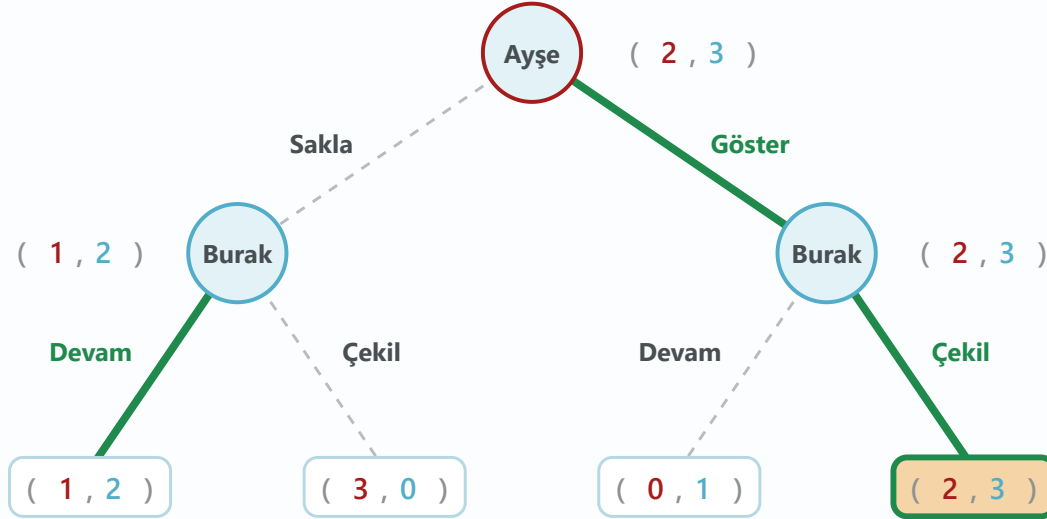
Göster'den sonra Burak: Devam 1, Çekil 3 $\Rightarrow$ **Çekil**. Bu düğümün değeri (2, 3).

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



Ayşe kökte, Burak'ın cevaplarını bilerek karşılaştırır: Sakla $\rightarrow 1$, Göster $\rightarrow 2 \Rightarrow$ **Göster**.

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



Sonuç yolu: Göster → Çekil, kazanç **(2, 3)**. $(3, 0)$ yaprağı Ayşe için en büyük sayıdır ama Burak oraya hiç gitmez.

ÖZET

Sık Yapılan Hatalar

Konu	Hata	Doğrusu
Profil	(Taş, Kağıt) = (Kağıt, Taş)	Sıra önemli: önce Ayşe, sonra Burak
Σ	$(\Sigma x_i)^2 = \Sigma x_i^2$	Önce terimleri hesapla, sonra topla
argmax	"argmax = 7"	argmax bir seçenektir (B); max değerdir (7)
Olasılık	En az bir 6: $1/6 + 1/6$	$1 - (5/6)^2 = 11/36$
Beklenen değer	"E = 3,5 gelecek"	Uzun vadeli ortalama; tek atışta gelmeyebilir
Karışık strateji	Sırayla değiştirmek	Her tur rastgele tek bir saf hamle
Matris	b'yi satır oyuncusuna yazmak	(a, b): a satır, b sütun oyuncusunun
En iyi tepki	Rakibin sayısına bakmak	Rakibin seçimini sabitle, kendi sayılarını karşılaştır
Kayıtsızlık	p'yi Ayşe'nin denkleminde bulmak	p, Burak'ı kayıtsız bırakan denklemden çıkar
Oyun ağacı	Kökten başlamak	Yapraktan köke: önce son hamle

ÖZET

Özet

Gösterim

$S_1 \times S_2$: tüm profiller.
 $u_i(\text{profil})$ = i. oyuncunun
kazancı (bir sayı).

Σ , max, argmax

Σ : terimleri hesapla, topla.
max: en büyük değer;
argmax: onu veren seçenek.

Olasılık

Eşit olası: say ve böl.
Bağımsız: çarp. "En az bir": 1
– hiç.

Beklenen değer

$E[X] = \Sigma x \cdot P(x)$: tur başına
uzun vadeli ortalama.

Karışık strateji

Kendi eylemlerin üzerinde
olasılık dağılımı; her tur bir
saf hamle.

Kazanç matrisi

(a, b): a satır, b sütun
oyuncusunun kazancı.

En iyi tepki

Rakibin seçimini sabitle;
kendi kazancının argmax'ı.

Kayıtsızlık

Karıştıran oyuncunun
eylemleri eşit beklenen
kazanç verir $\Rightarrow$ rakibin
olasılığı bulunur.

Geriye doğru çıkarım

Ağacı yapraktan köke çöz:
her düğümde sıradaki
oyuncu en iyisini seçer.

ÖZET

Kendini Dene

1. İki yazı-tura atılıyor. En az bir yazı gelme olasılığı kaç?
2. Bir piyango 0,2 olasılıkla 50 TL, 0,8 olasılıkla 0 TL ödüyor; bilet 8 TL. Net beklenen kazanç kaç?
3. Kazançlar Taş: 2, Kağıt: -1, Makas: 2. max ve argmax nedir?
4. Burak (1/4 Taş, 1/2 Kağıt, 1/4 Makas) oynuyor. Ayşe'nin en iyi tepkisi hangi hamle?
5. $x + y = 1$ ve $3x = y$ ise x ve y kaçtır?

► Cevapları göster

Son

Bölüm 0: Hazırlık — Oyun Kuramı İçin Gerekli Matematik

Sonraki bölüm: Bölüm 1: Oyun Kuramı Temelleri

[Çalışma soruları](#) · [Terim sözlüğü](#) · [Ön koşullar](#)