Bölüm 8: Dinamik Programlama

Algoritmalar

Örtüşen alt problemler | Bellekleme ve tablolama | Fibonacci | 0/1 ve sınırsız sırt çantası | Alt küme toplamı | En uzun artan alt dizi | En uzun ortak alt dizgi | En uzun ortak alt dizi

Sercan KÜLCÜ · Giresun Üniversitesi · Bilgisayar Mühendisliği

GİRİŞ

Öğrenme Çıktıları

Tanıma

Bir problemde **örtüşen alt problemleri** ve **optimal alt yapıyı** fark etmek; dinamik programlamanın ne zaman uygun olduğuna karar vermek.

Formülleme

Alt problemi (durumu) tanımlamak, yineleme bağıntısını ve taban durumlarını yazmak, tablo doldurma sırasını belirlemek.

Uygulama

Fibonacci, 0/1 ve sınırsız sırt çantası, alt küme toplamı, LIS, en uzun ortak alt dizgi ve LCS tablolarını elle doldurmak ve Java ile yazmak.

Analiz

Bellekleme ile tablolamayı karşılaştırmak; $O(n \cdot W)$, $O(m \cdot n)$, $O(n^2)$, $O(n \log n)$ karmaşıklıklarını gerekçelendirmek; tablodan çözümü geri okumak.

TEMEL KAVRAMLAR

Dinamik Programlama (Dynamic Programming) Nedir?

- Bazen karmaşık problemleri çözmek için **akıllı yöntemlere** ihtiyaç olur; dinamik programlama bunlardan biridir.
- Büyük problemi **küçük, tekrarlayan alt problemlere** böler ve adım adım çözer.
- Her alt problemin çözümü bir **tabloya** yazılır; aynı alt problemle yeniden karşılaşıldığında çözüm **tablodan okunur**, böylece zaman kazanılır.
- Özellikle **optimizasyon problemlerinde** (en büyük değer, en kısa yol, en az işlem) sıkça kullanılır.

Kısaca

DP = özyineleme + **hatırlama**. Her dinamik programlama problemi düz özyineleme ile de çözülebilir; DP, aynı işi **iki kez yapmamayı** sağlar.

Ad, Richard Bellman'dan (1950'ler) gelir; "programlama" burada kod yazmak değil, **tablo ile planlama** anlamındadır.

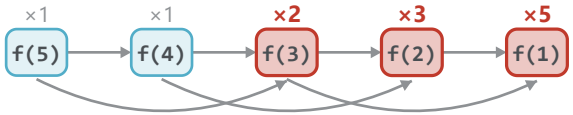
TEMEL KAVRAMLAR

DP İçin İki Temel Özellik

1. Örtüşen alt problemler (overlapping subproblems)

Özyinelemeli çözüm **aynı alt problemi tekrar tekrar** çağırır. Örnek: fib(5) hesaplanırken fib(3) iki kez, fib(2) üç kez hesaplanır.

Alt problemler birbirinden bağımsızsa (birleştirme sıralaması gibi) tablo işe yaramaz; bu **böl ve fethet**tir.



2. Optimal alt yapı (optimal substructure)

Problemin optimal çözümü, alt problemlerin **optimal çözümlerinden** kurulabilir.

Bellman'ın optimallik ilkesi: optimal bir çözümün içerdiği her alt çözüm de kendi alt problemi için optimaldir.

Bellman denklemi örneği (en büyük toplamlı alt dizi): V(i) = i'de biten en büyük toplam ise `V(i) = max(a[i], V(i-1) + a[i])`. Değer, bir önceki alt problemin **optimal** değerinden hesaplanır.

Bir DP Çözümü Tasarlamanın Adımları

1. **Optimal çözümün yapısı** incelenir: hangi alt problemler çözülmeli?
2. **Durum ve bağıntı** yazılır: çözüm daha küçük alt problemler cinsinden ifade edilir (yineleme bağıntısı + taban durumları).
3. **Hesaplama sırası** belirlenir: bir hücre hesaplanırken ihtiyaç duyduğu hücreler hazır olmalı.
4. **Tablonun boyutu** belirlenir: kaç boyut, her boyut kaç değer? (ör. $(n+1) \times (W+1)$)
5. **Tablo doldurulur:** aşağıdan yukarı (tablolama) ya da yukarıdan aşağı (bellekleme).
6. **Çözüm geri okunur:** yalnızca değer değil, seçilen öğeler de tablodan geriye doğru okunarak bulunur.

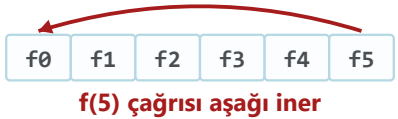
Toplam süre ≈ (durum sayısı) × (bir durumun hesaplanma süresi). Bu kural bölümdeki tüm karmaşıklıkları açıklar.

TEMEL KAVRAMLAR

Bellekleme (Memoization) ve Tablolama (Tabulation)

Yukarıdan aşağı: Bellekleme

- Özyinelemeli çözüm aynen yazılır; sonuçlar bir **önbellekte** (dizi / HashMap) saklanır.
- Çağrıdan önce tabloya bakılır: varsa döndürülür, yoksa hesaplanıp yazılır.
- Yalnızca **gerçekten ihtiyaç duyulan** alt problemler çözülür.
- Derin özyinelemede yığın taşması (StackOverflowError) riski.



Aşağıdan yukarı: Tablolama

- En küçük alt problemden başlanır, tablo **döngülerle** sırayla doldurulur.
- Özyineleme yok, çağrı maliyeti yok; genellikle daha hızlıdır.
- Doldurma sırası önceden doğru belirlenmelidir.
- Yalnızca önceki satır gerekiyorsa **bellek azaltılabilir** (ör. O(W)).



İkisi de her alt problemi **bir kez** çözer; asimptotik süre aynıdır. Fark, sıra ve uygulama biçimindedir.

TEMEL KAVRAMLAR

DP, Böl ve Fethet ve Açgözlü Yaklaşım

	Böl ve Fethet	Dinamik Programlama	Açgözlü (Greedy)
Alt problemler	bağımsız	örtüşen	her adımda tek seçim
Seçim	yok, böl ve birleştir	tüm seçenekler denenir, en iyisi tabloya	o anki en iyi seçilir, geri dönülmez
Optimallik	—	optimal alt yapı varsa garanti	yalnızca açgözlü seçim özelliği varsa
Örnek	birleştirme sıralaması, ikili arama	0/1 sırt çantası, LCS, Bellman-Ford	kesirli sırt çantası, Dijkstra, Kruskal
Maliyet	yineleme bağıntısı, ana teorem	durum sayısı × durum başına iş	genelde O(n log n): sıralama + tek geçiş
Bellek	özyineleme yığını	tablo (çoğu zaman O(n · W) ya da O(m · n))	genellikle O(1) ek bellek

Açgözlü yaklaşım, her adımda yalnızca tek bir seçeneğe bakan bir dinamik programlama gibi düşünülebilir: seçimin doğru olduğu kanıtlanabiliyorsa tablo gerekmez.

TEMEL KAVRAMLAR

Dinamik Programlama Uygulamaları

En kısa yol

GPS cihazları, haritalar: Bellman-Ford, Floyd-Warshall.

Dizgi karşılaştırma

diff, yazım denetimi: LCS, düzenleme uzaklığı (edit distance).

Biyoinformatik

DNA/protein hizalama (Needleman-Wunsch, Smith-Waterman), RNA yapısının belirlenmesi.

Kaynak dağıtımı

Sırt çantası, bütçe ve yatırım planlama, üretim hattı çizelgeleme.

Derleyiciler ve sayısal hesap

Matris zinciri çarpımı, optimal ikili arama ağacı, ayrıştırma (CYK).

Yapay zekâ

Satranç oynayan bilgisayarlar, makine çevirisi, pekiştirmeli öğrenme (Bellman denklemi).

Fibonacci: Düz Özyineleme

Fibonacci dizisi: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

$$F(0) = 0,\ F(1) = 1$$
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2),\ n \geq 2$$

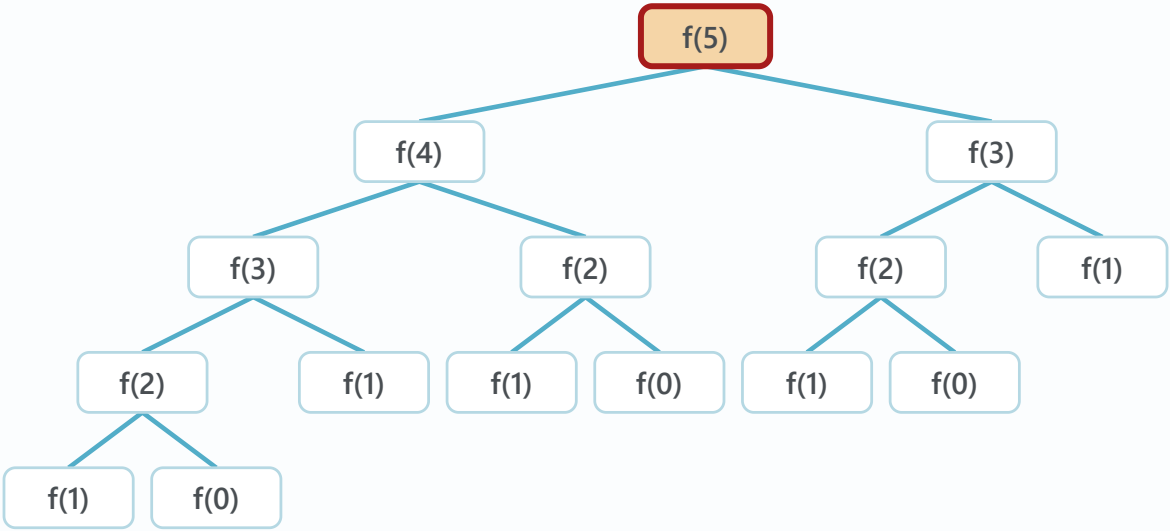
```
static long fib(int n) {
  if (n <= 1)
    return n;          // taban durumları
  return fib(n - 1) + fib(n - 2);
}
```

- Tanımın birebir kopyası; doğru ama **çok yavaş**.
- Çağrı sayısı: `T(n) = T(n−1) + T(n−2) + 1` → **$\Theta(\varphi^n)$**, $\varphi \approx 1{,}618$ (altın oran).
- fib(40) yaklaşık **331 milyon** çağrı yapar; fib(50) ise dakikalar sürer.
- Neden? Aynı alt problemler (fib(3), fib(2), …) **tekrar tekrar** hesaplanır: örtüşen alt problemler.

FIBONACCI

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



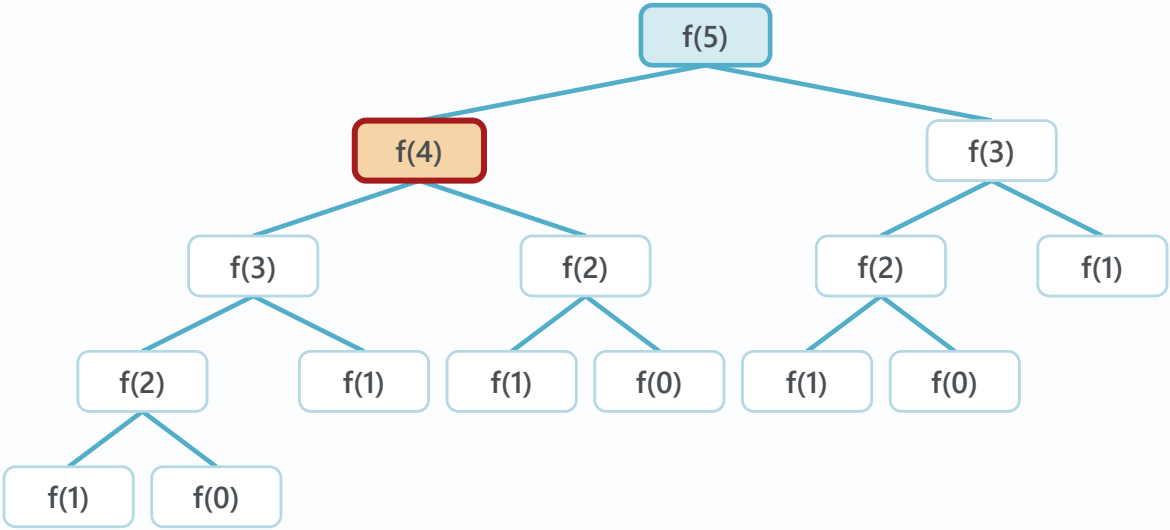
`fib(5)` çağrıldı Yığın: fib(5)

Adım 1 / 16

FIBONACCI

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

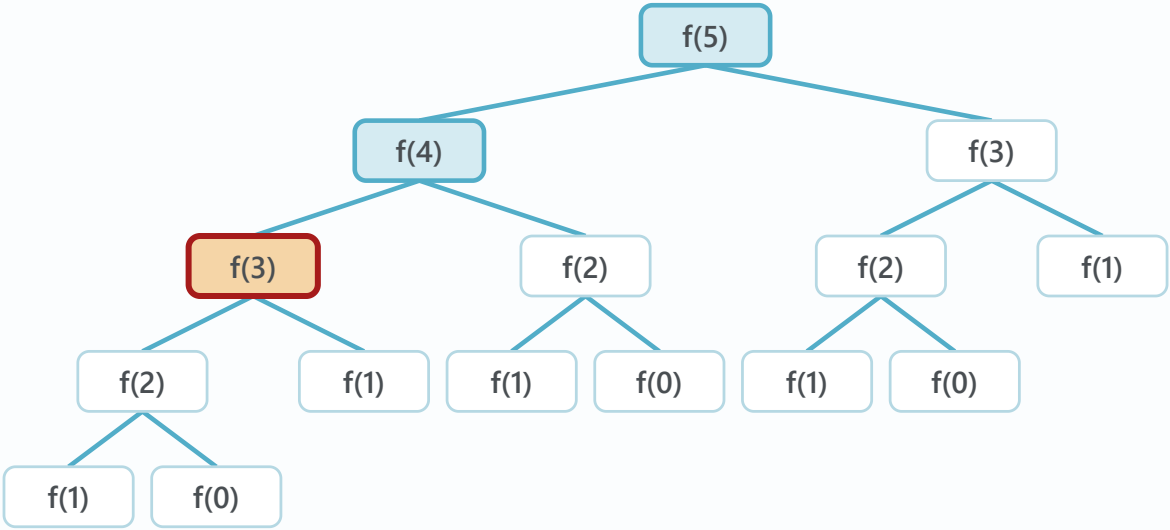
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(4)` çağrıldı Yığın: fib(5) → fib(4)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

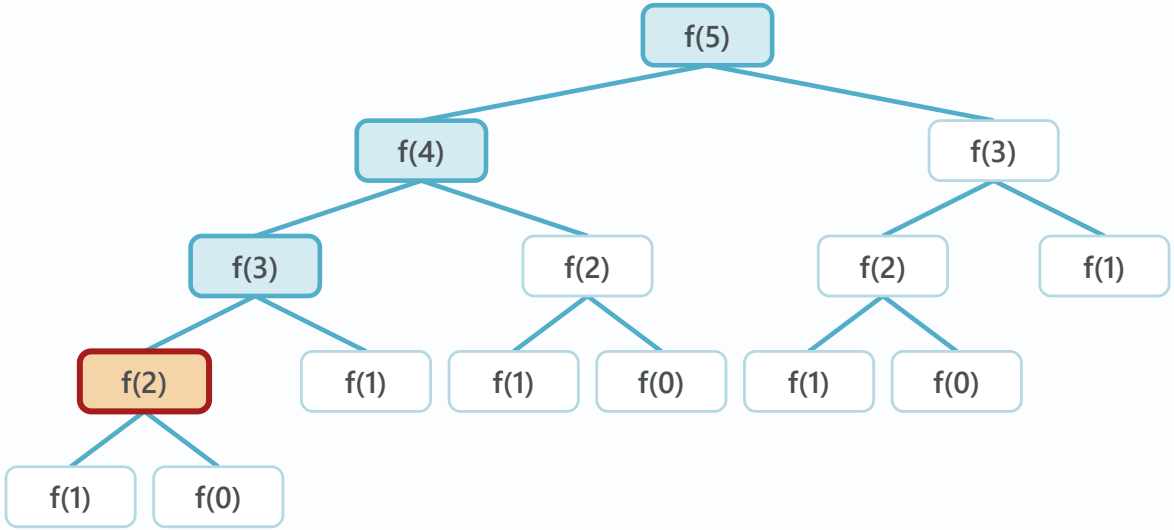
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(3)` çağrıldı Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(3)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

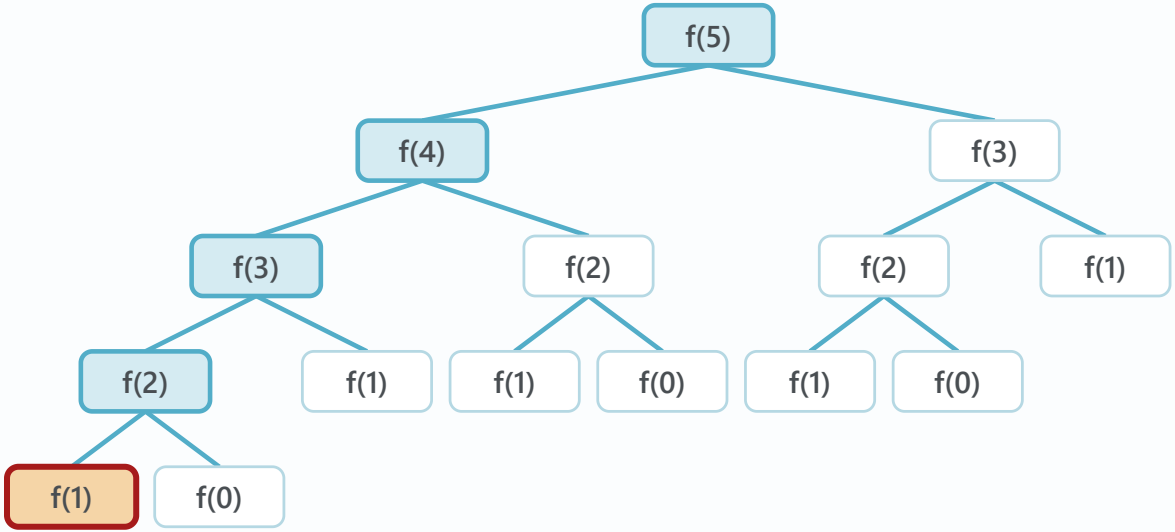
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(2)` çağrıldı Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(3) → fib(2)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

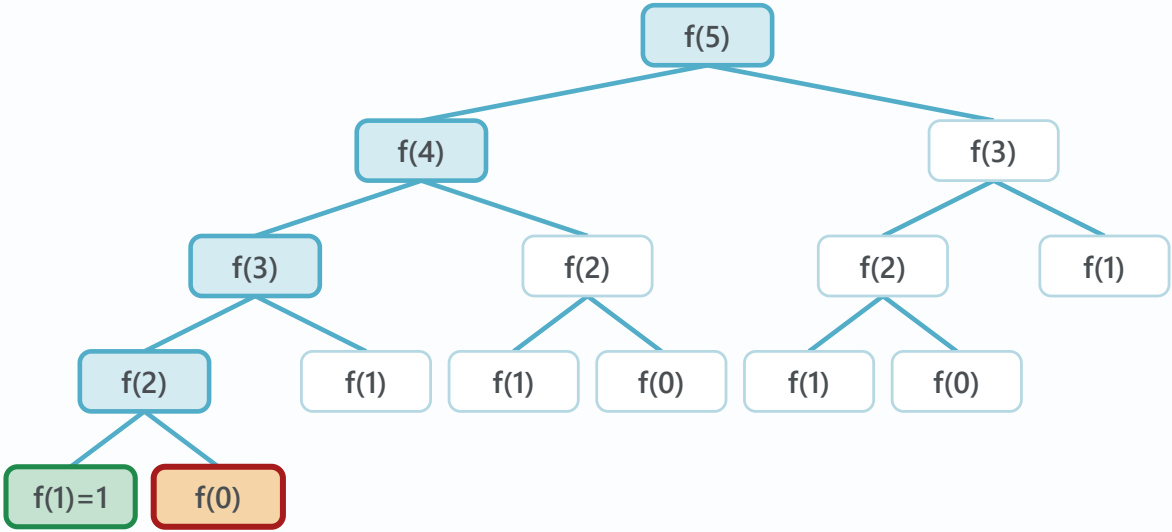
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(1)` taban durumu: hemen **1** döner. Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(3) → fib(2) → fib(1)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

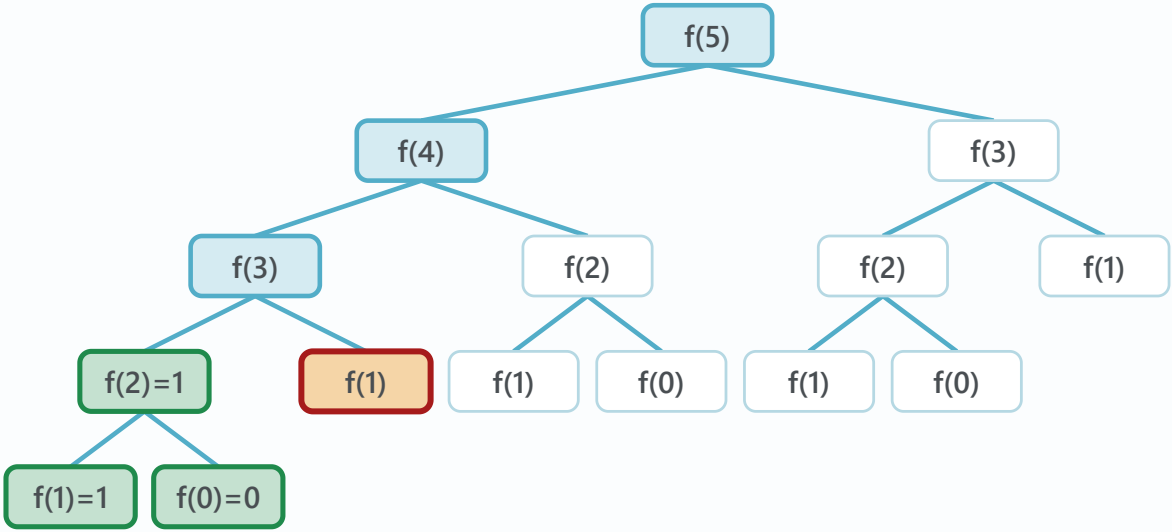
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(0)` taban durumu: hemen **0** döner. Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(3) → fib(2) → fib(0)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

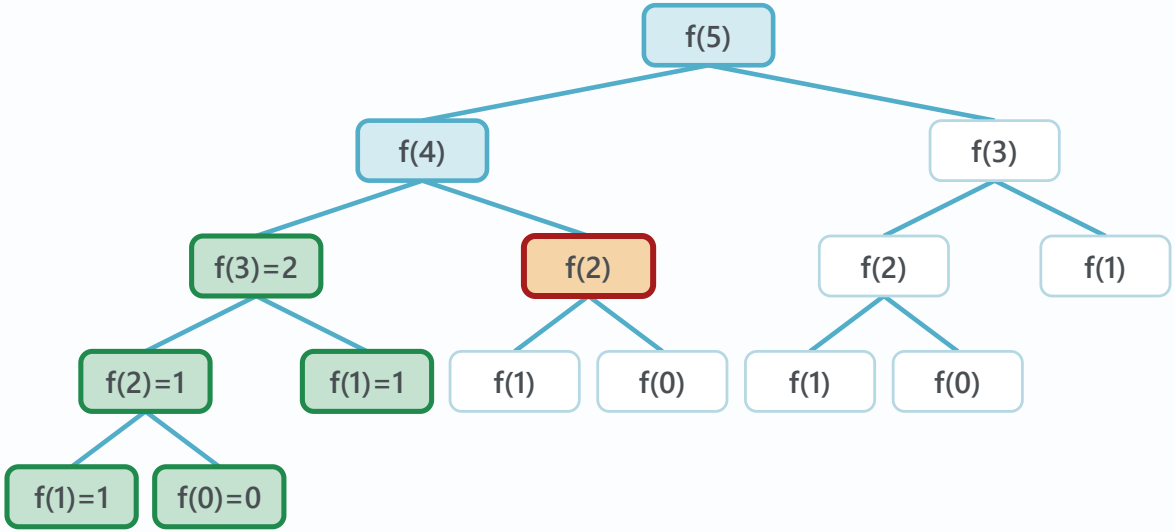
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(1)` taban durumu: hemen **1** döner. Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(3) → fib(1)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

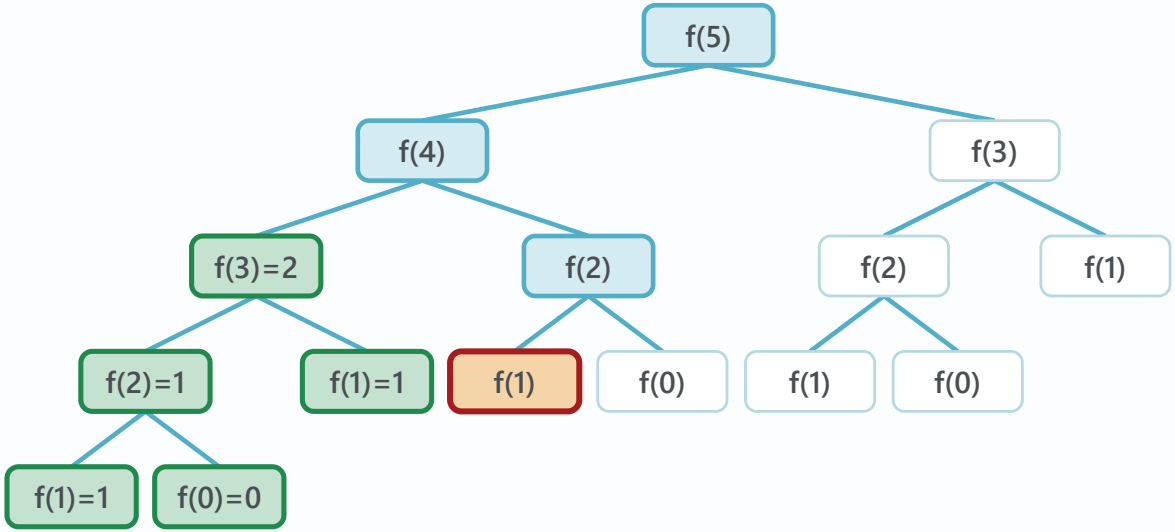
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(2)` çağrıldı — **2. kez** hesaplanıyor! Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(2)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

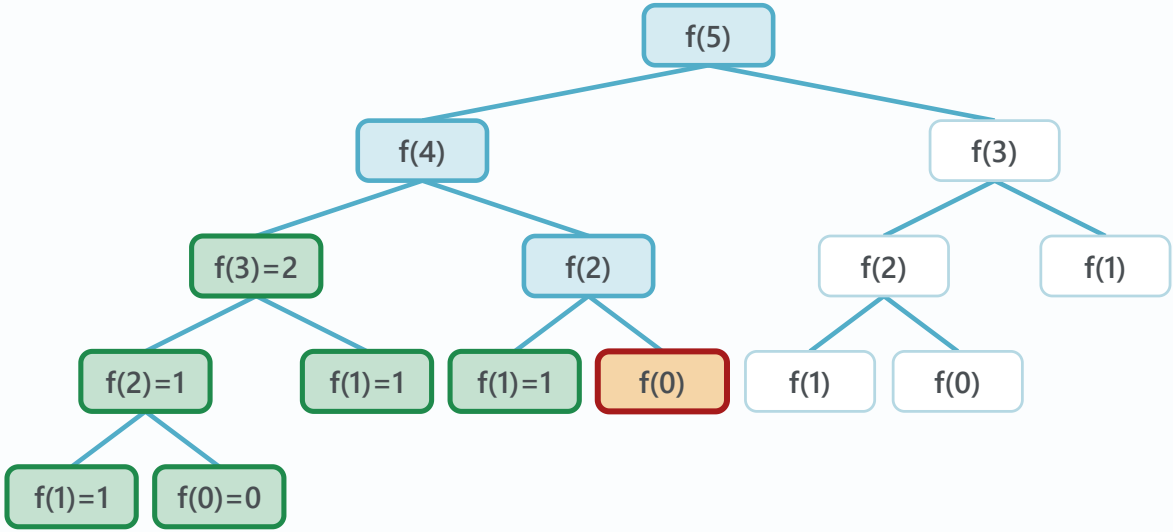
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(1)` taban durumu: hemen **1** döner. Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(2) → fib(1)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

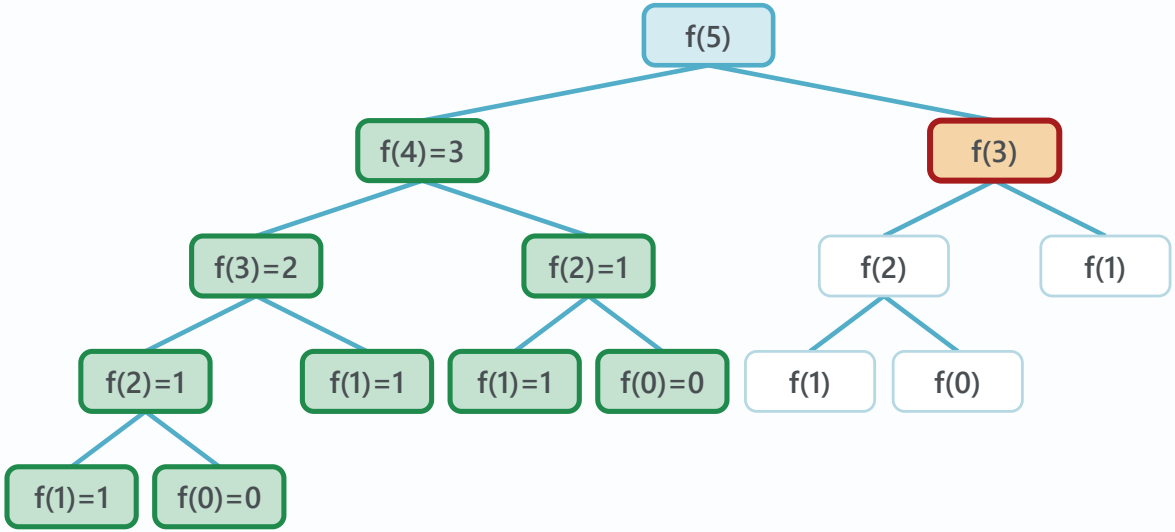
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(0)` taban durumu: hemen **0** döner. Yığın: fib(5) → fib(4) → fib(2) → fib(0)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

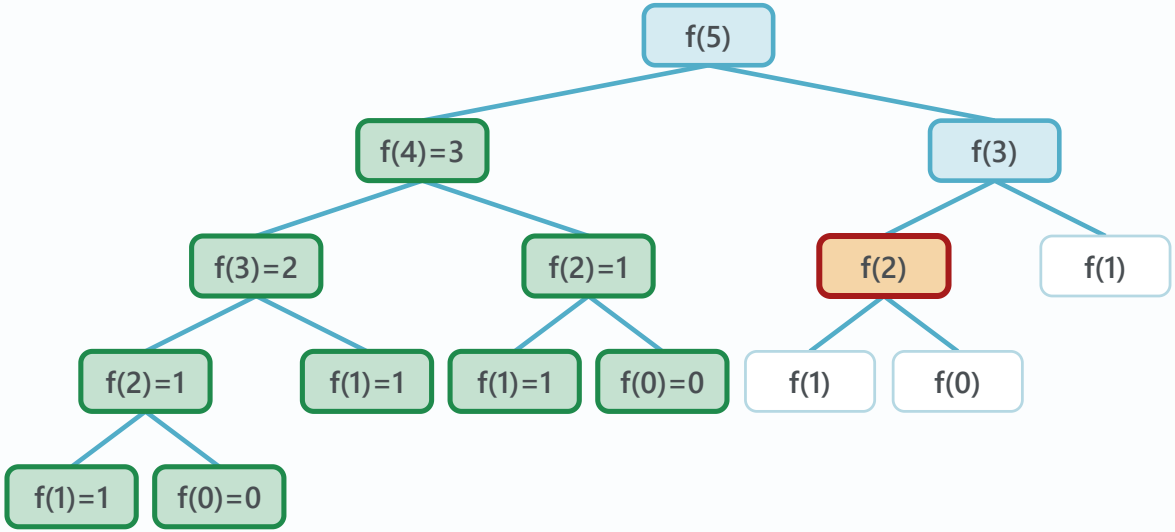
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(3)` çağrıldı — **2. kez** hesaplanıyor! Yığın: fib(5) → fib(3)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

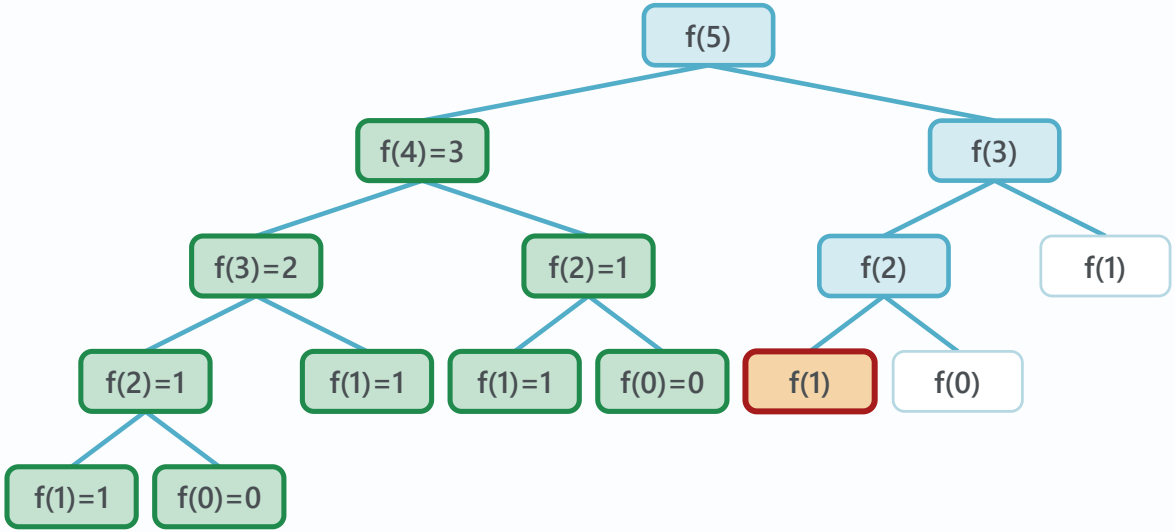
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(2)` çağrıldı — **3. kez** hesaplanıyor! Yığın: fib(5) → fib(3) → fib(2)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

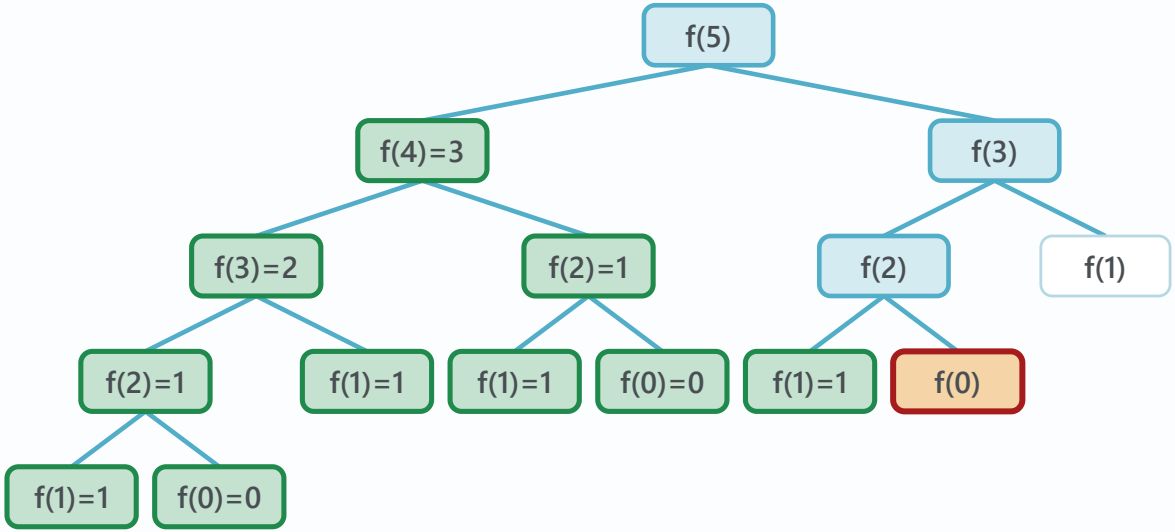
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(1)` taban durumu: hemen **1** döner. Yığın: fib(5) → fib(3) → fib(2) → fib(1)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

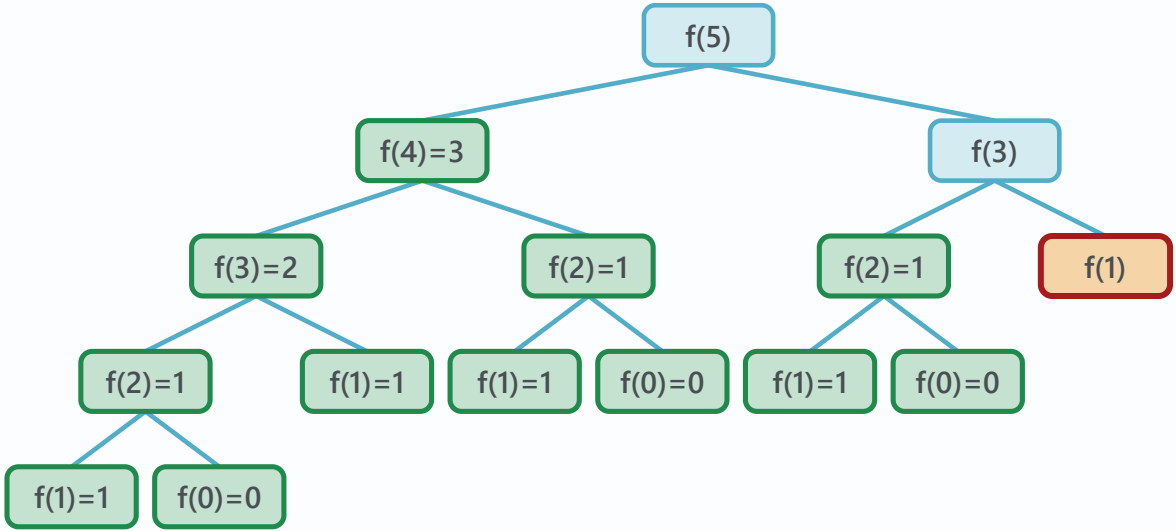
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(0)` taban durumu: hemen **0** döner. Yığın: fib(5) → fib(3) → fib(2) → fib(0)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

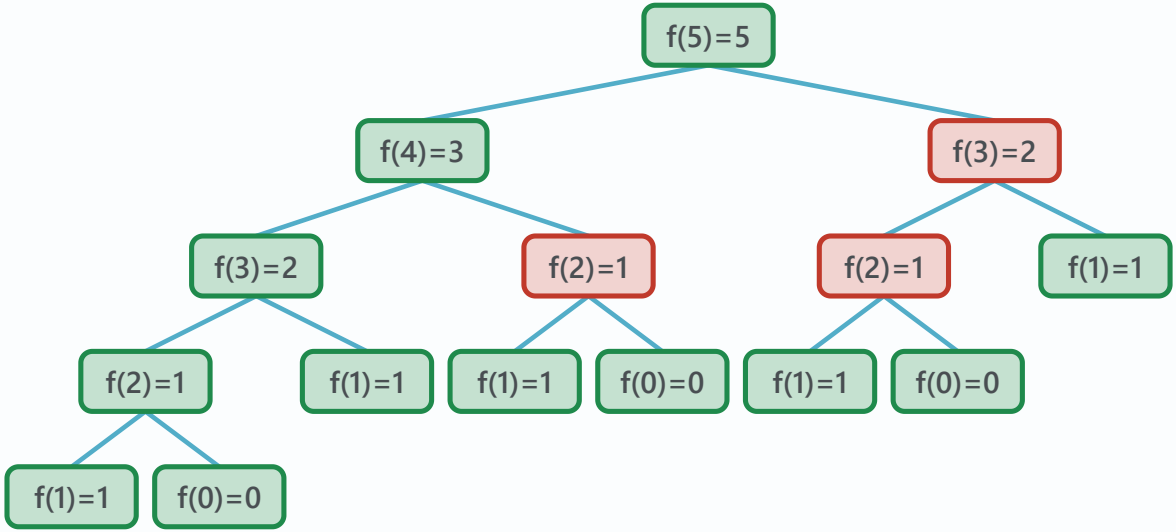
Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



`fib(1)` taban durumu: hemen **1** döner. Yığın: fib(5) → fib(3) → fib(1)

fib(5) Özyineleme Ağacı: Çağrı Sırası

Turuncu: çalışan çağrı · mavi: yığında bekleyen çağrılar · yeşil: bitmiş çağrı (değeriyle).



Sonuç fib(5) = **5**, toplam **15 çağrı**. Kırmızı kutular tekrar: fib(3) 2 kez, fib(2) 3 kez, fib(1) 5 kez hesaplandı.

FIBONACCI

Tekrarlanan Hesapların Bedeli

n	F(n)	düz özyineleme çağrısı	bellekleme çağrısı
5	5	15	9
10	55	177	19
20	6.765	21.891	39
30	832.040	2.692.537	59
40	102.334.155	331.160.281	79

- Düz özyinelemede çağrı sayısı **2·F(n+1) − 1**: Fibonacci sayılarının kendisi kadar hızlı (üstel) büyür.
- Oysa yalnızca **n+1 farklı** alt problem vardır: fib(0), fib(1), …, fib(n).
- Her birini **bir kez** çözüp saklarsak çağrı sayısı **2n − 1**'e iner: üstelden doğrusala.

DP'nin özü: **farklı alt problem sayısı** küçük, ama özyinelemenin onları **çağırma sayısı** büyükse, sonuçları saklamak büyük kazanç sağlar.

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;           // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```

f(5)

bellek	—	—	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5

`fib(5)` : tabloda yok; önce `fib(4)` çağrılır.

Adım 1 / 17

DEĞİŞKENLER

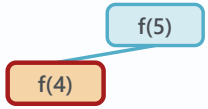
`n = 5` `a = ?` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

`fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;           // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



bellek	—	—	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5

`fib(4)` : tabloda yok; önce `fib(3)` çağrılır.

Adım 2 / 17

DEĞİŞKENLER

`n = 4` `a = ?` `b = –`

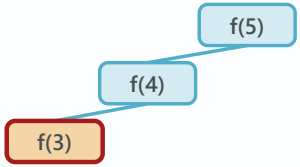
ÇAĞRI YIĞINI

`fib(4)`

`fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;           // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



bellek	—	—	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5

`fib(3)` : tabloda yok; önce `fib(2)` çağrılır.

Adım 3 / 17

DEĞİŞKENLER

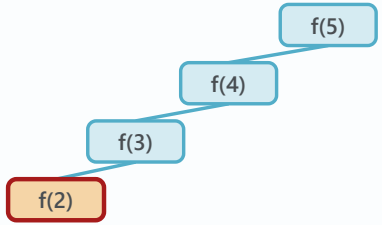
`n = 3` `a = ?` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

- **fib(3)**
- fib(4)
- fib(5)

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;           // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
▶    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



bellek	—	—	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5

`fib(2)` : tabloda yok; önce `fib(1)` çağrılır.

Adım 4 / 17

DEĞİŞKENLER

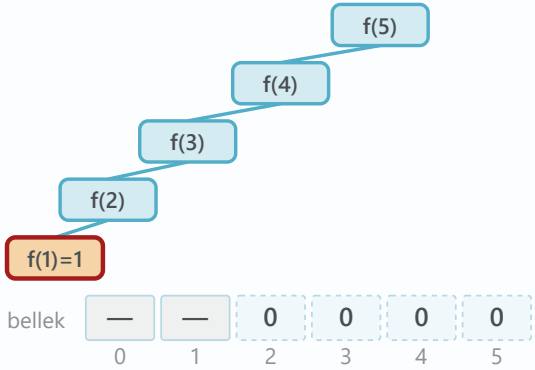
`n = 2` `a = ?` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

- **`fib(2)`**
- `fib(3)`
- `fib(4)`
- `fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;          // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



`fib(1)` : taban durumu, **1** döner.

Adım 5 / 17

DEĞİŞKENLER

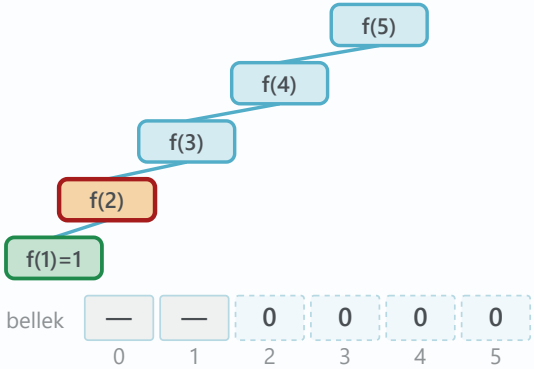
`n = 1` `a = –` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

- **fib(1)**
- fib(2)
- fib(3)
- fib(4)
- fib(5)

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;          // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
▶    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



`fib(1)` döndü (a = 1); şimdi `fib(0)` çağrılır.

Adım 6 / 17

DEĞİŞKENLER

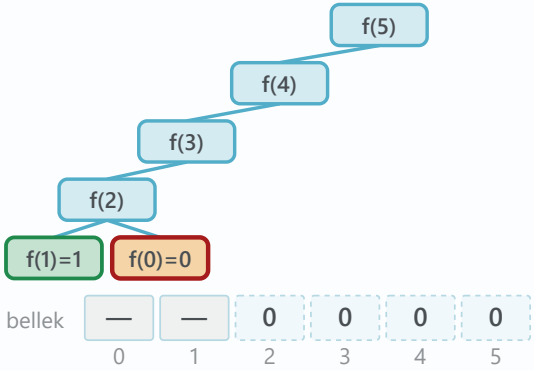
`n = 2` `a = 1` `b = ?`

ÇAĞRI YIĞINI

- `fib(2)`
- `fib(3)`
- `fib(4)`
- `fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4      if (n <= 1) return n;          // taban
5      if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6      long a = fib(n - 1);
7      long b = fib(n - 2);
8      bellek[n] = a + b;
9      return bellek[n];
10 }
```



`fib(0)` : taban durumu, **0** döner.

Adım 7 / 17

DEĞİŞKENLER

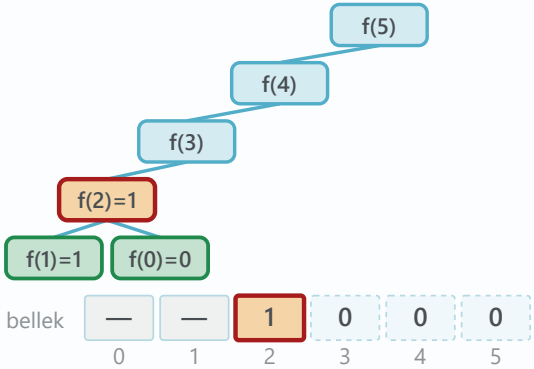
`n = 0` `a = –` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

- **`fib(0)`**
- `fib(2)`
- `fib(3)`
- `fib(4)`
- `fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;          // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
▶    bellek[n] = a + b;
▶    return bellek[n];
10 }
```



`bellek[2] = 1 + 0 = 1` tabloya yazılır ve döndürülür.

Adım 8 / 17

DEĞİŞKENLER

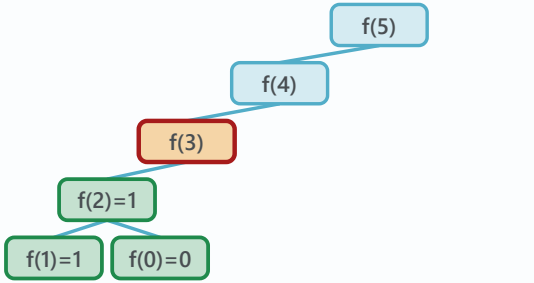
`n = 2` `a = 1` `b = 0`

ÇAĞRI YIĞINI

- **fib(2)**
- fib(3)
- fib(4)
- fib(5)

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;           // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
▶    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



`fib(2)` döndü (a = 1); şimdi `fib(1)` çağrılır.

Adım 9 / 17

DEĞİŞKENLER

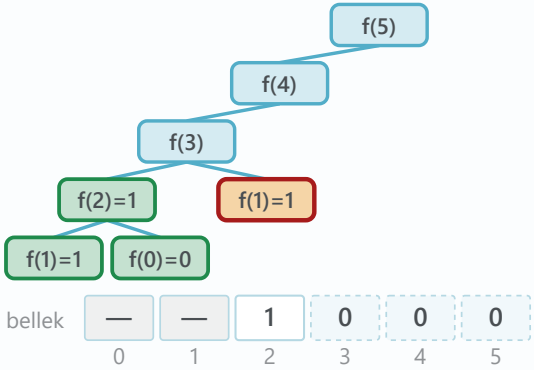
`n = 3` `a = 1` `b = ?`

ÇAĞRI YIĞINI

- `fib(3)`
- `fib(4)`
- `fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4      if (n <= 1) return n;          // taban
5      if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6      long a = fib(n - 1);
7      long b = fib(n - 2);
8      bellek[n] = a + b;
9      return bellek[n];
10 }
```



`fib(1)` : taban durumu, **1** döner.

Adım 10 / 17

DEĞİŞKENLER

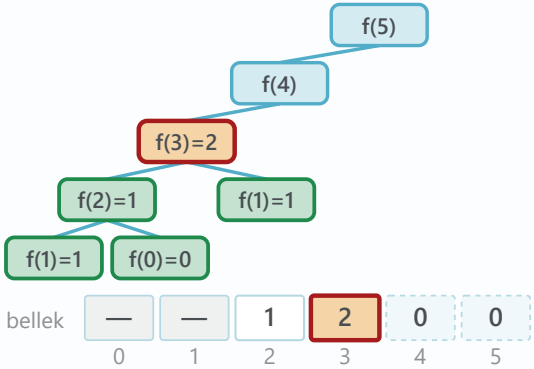
`n = 1` `a = –` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

- **`fib(1)`**
- `fib(3)`
- `fib(4)`
- `fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;          // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
▶    bellek[n] = a + b;
▶    return bellek[n];
10 }
```



`bellek[3] = 1 + 1 = 2` tabloya yazılır ve döndürülür.

Adım 11 / 17

DEĞİŞKENLER

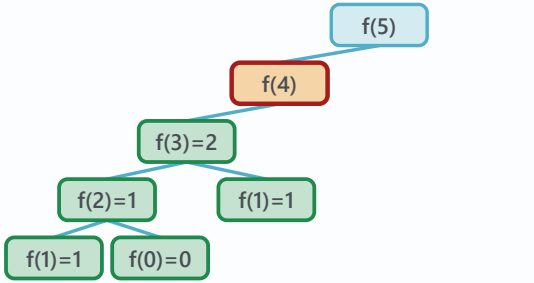
`n = 3` `a = 1` `b = 1`

ÇAĞRI YIĞINI

- **fib(3)**
- fib(4)
- fib(5)

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;           // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
▶    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



`fib(3)` döndü (a = 2); şimdi `fib(2)` çağrılır.

Adım 12 / 17

DEĞİŞKENLER

`n = 4` `a = 2` `b = ?`

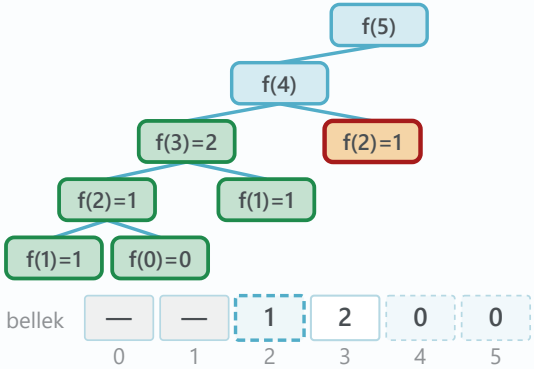
ÇAĞRI YIĞINI

`fib(4)`

`fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;            // taban
     if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



`fib(2)` : `bellek[2] = 1` tabloda **hazır**; yeniden hesaplanmaz.

Adım 13 / 17

DEĞİŞKENLER

`n = 2` `a = –` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

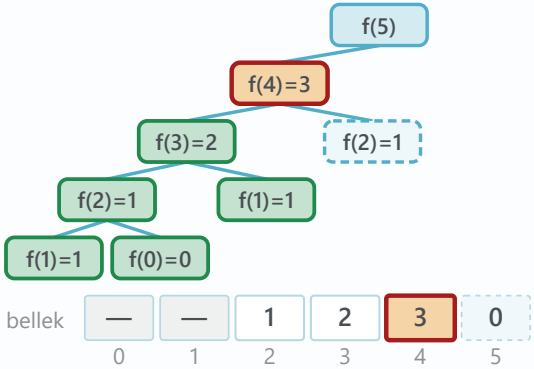
`fib(2)`

`fib(4)`

`fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;            // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
▶    bellek[n] = a + b;
▶    return bellek[n];
10 }
```



`bellek[4] = 2 + 1 = 3` tabloya yazılır ve döndürülür.

Adım 14 / 17

DEĞİŞKENLER

`n = 4` `a = 2` `b = 1`

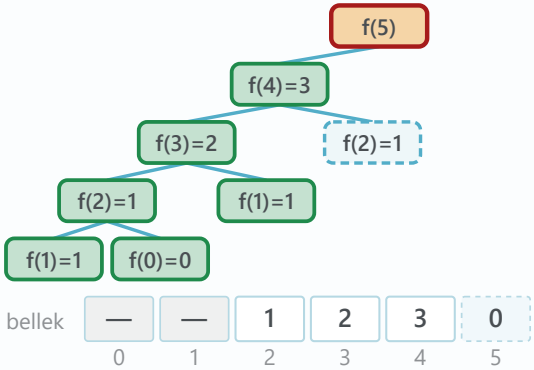
ÇAĞRI YIĞINI

`fib(4)`

`fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;           // taban
5    if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
▶    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



`fib(4)` döndü (a = 3); şimdi `fib(3)` çağrılır.

Adım 15 / 17

DEĞİŞKENLER

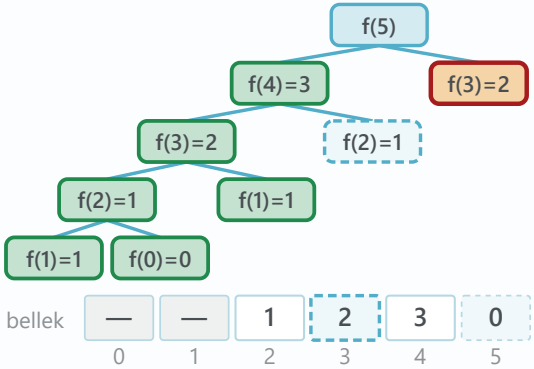
`n = 5` `a = 3` `b = ?`

ÇAĞRI YIĞINI

`fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```
1  static long[] bellek = new long[50];
2
3  static long fib(int n) {
4    if (n <= 1) return n;            // taban
     if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
6    long a = fib(n - 1);
7    long b = fib(n - 2);
8    bellek[n] = a + b;
9    return bellek[n];
10 }
```



`fib(3)` : `bellek[3] = 2` tabloda **hazır**; yeniden hesaplanmaz.

Adım 16 / 17

DEĞİŞKENLER

`n = 3` `a = –` `b = –`

ÇAĞRI YIĞINI

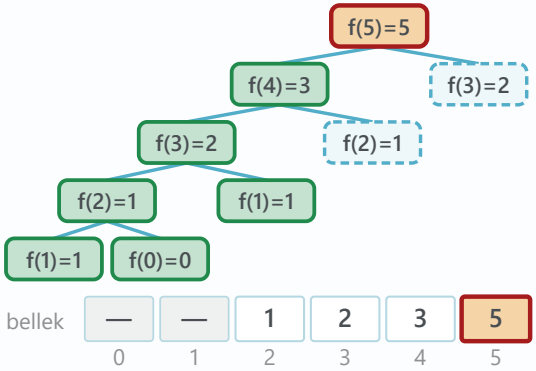
`fib(3)`

`fib(5)`

Bellekleme: fib(5) Adım Adım

```java
static long[] bellek = new long[50];

static long fib(int n) {
  if (n <= 1) return n;           // taban
  if (bellek[n] != 0) return bellek[n];
  long a = fib(n - 1);
  long b = fib(n - 2);
  bellek[n] = a + b;
  return bellek[n];
}
```



`bellek[5] = 3 + 2 = 5` tabloya yazılır ve döndürülür.

Adım 17 / 17

DEĞİŞKENLER

`n = 5` `a = 3` `b = 2`

ÇAĞRI YIĞINI

`fib(5)`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
  if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n = 1
  int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
6   for (int i = 2; i <= n; i++)
7     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

`fib` dizisi n + 1 = 10 öğeyle oluşturulur (Java'da başlangıçta hepsi 0).

Adım 1 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = –`

FIBONACCI

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n = 1
3   int[] fib = new int[n + 1];
▶   fib[0] = 0;   // taban durumları
▶   fib[1] = 1;
6   for (int i = 2; i <= n; i++)
7     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



Taban durumları yazılır: `fib[0] = 0`, `fib[1] = 1`. Boş hücreler henüz hesaplanmadı.

Adım 2 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = –`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 2: `fib[2] = fib[1] + fib[0] = 1 + 0 = 1`

Adım 3 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 2` `fib[i] = 1`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 3: `fib[3] = fib[2] + fib[1] = 1 + 1 = 2`

Adım 4 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 3` `fib[i] = 2`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 4: `fib[4] = fib[3] + fib[2] = 2 + 1 = 3`

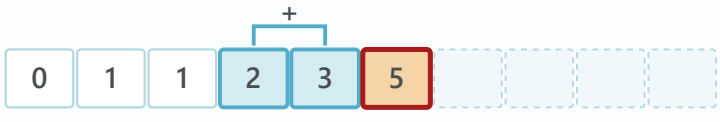
Adım 5 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 4` `fib[i] = 3`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 5: `fib[5] = fib[4] + fib[3] = 3 + 2 = 5`

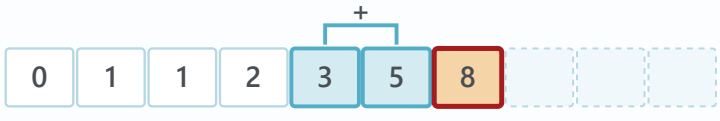
Adım 6 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 5` `fib[i] = 5`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 6: `fib[6] = fib[5] + fib[4] = 5 + 3 = 8`

Adım 7 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 6` `fib[i] = 8`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n = 1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 7: `fib[7] = fib[6] + fib[5] = 8 + 5 = 13`

Adım 8 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 7` `fib[i] = 13`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 8: `fib[8] = fib[7] + fib[6] = 13 + 8 = 21`

Adım 9 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 8` `fib[i] = 21`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
▶   for (int i = 2; i <= n; i++)
▶     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
8   return fib[n];
9 }
```



i = 9: `fib[9] = fib[8] + fib[7] = 21 + 13 = 34`

Adım 10 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 9` `fib[i] = 34`

Tablolama: fibonacci(9) Adım Adım

```
1 static int fibonacci(int n) {
2   if (n <= 1) return n;   // n = 0 ve n =
  1
3   int[] fib = new int[n + 1];
4   fib[0] = 0;   // taban durumları
5   fib[1] = 1;
6   for (int i = 2; i <= n; i++)
7     fib[i] = fib[i - 1] + fib[i - 2];
▶   return fib[n];
9 }
```

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Döngü biter; `fib[9] = 34` döndürülür. Her hücre **bir kez** hesaplandı: O(n) zaman, O(n) bellek.

Adım 11 / 11

DEĞİŞKENLER

`n = 9` `i = 10` `fib[i] = –`

Fibonacci: O(1) Bellek ve Karşılaştırma

```java
static long fib(int n) {
  if (n <= 1) return n;
  long once = 0, simdi = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    long yeni = once + simdi;
    once = simdi;
    simdi = yeni;
  }
  return simdi;
}
```

Yöntem	Zaman	Ek bellek
Düz özyineleme	$\Theta(\varphi^n)$	O(n) yığın
Bellekleme	O(n)	O(n) tablo + yığın
Tablolama	O(n)	O(n) tablo
İki değişken	O(n)	**O(1)**

Bellek azaltma: fib[i] yalnızca son **iki** değere bağlıdır; tüm diziyi saklamaya gerek yoktur. Aynı fikir sırt çantasında "yalnızca önceki satır" olarak karşımıza çıkacak.

0/1 Sırt Çantası (0/1 Knapsack) Problemi

- n eşya: her eşyanın bir **değeri** v_i ve bir **ağırlığı** (hacmi) w_i var.
- Çantanın **kapasitesi** W.
- Her eşya ya **tamamen alınır (1)** ya da **hiç alınmaz (0)**; bölünemez.
- Amaç: toplam ağırlık ≤ W olacak şekilde **toplam değeri en büyük** yapmak.



Soru: Resimdeki çantaya hangi eşyalar konmalı?

▶ **Cevap**

Neden Kaba Kuvvet ya da Açgözlü Değil?

Kaba kuvvet

Her eşya için 2 seçenek → **2^n** alt küme. n = 50 için 10^{15}'ten fazla küme: pratikte imkânsız.

Açgözlü (değer/ağırlık oranı)

W = 50; eşyalar (60 ₺, 10 kg), (100 ₺, 20 kg), (120 ₺, 30 kg). Oranlar 6, 5, 4 → açgözlü ilk ikisini alır: **160 ₺**. Optimal: ikinci + üçüncü = **220 ₺**.



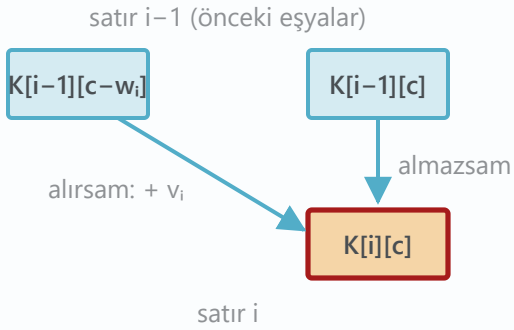
Açgözlü seçim yalnızca eşyalar **bölünebiliyorsa** (kesirli sırt çantası) optimaldir. 0/1 durumunda bir eşyayı almak, sonraki seçenekleri değiştirir: her iki seçeneği de denemek gerekir → **dinamik programlama**.

0/1 Sırt Çantası: Durum ve Bağıntı

Durum: K[i][c] = ilk **i** eşya ve **c** kapasite ile elde edilebilecek en büyük değer.

$K[0][c] = 0,\ K[i][0] = 0$
$w_i > c$ ise: $K[i][c] = K[i-1][c]$
aksi hâlde: $K[i][c] = \max(K[i-1][c],\ v_i + K[i-1][c - w_i])$

- **Almazsam:** kapasite aynı kalır, önceki eşyalarla en iyisi.
- **Alırsam:** v_i kazanırım, kalan $c - w_i$ kapasiteyi önceki eşyalarla en iyi şekilde doldururum.
- Cevap: **K[n][W]**. Tablo (n+1) × (W+1), satır satır doldurulur.



0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
▶    int n = v.length;
▶    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
10         K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
11                            vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0						
2	4	3	0						
3	3	2	0						
4	2	1	0						

Tablo (n+1) × (W+1) = 5 × 7. Satır 0 (eşya yok) ve sütun 0 (kapasite yok) **0**'dır.

Adım 1 / 26

DEĞİŞKENLER

`n = 4` `W = 6` `i = –` `c = –`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
▶        if (wi > c)              // sığmaz
▶          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
10         K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
11                            vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0					
2	4	3	0						
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=1, c=1: w=4 > 1, eşya **sığmaz** → üstteki değer kopyalanır: K[1][1] = **0**

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `c = 1` `vi = 5` `wi = 4` `alma = 0` `al = –`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
▶        if (wi > c)              // sığmaz
▶          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
10         K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
11                            vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0				
2	4	3	0						
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=1, c=2: w=4 > 2, eşya **sığmaz** → üstteki değer kopyalanır: K[1][2] = **0**

Adım 3 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `c = 2` `vi = 5` `wi = 4` `alma = 0` `al = –`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
▶        if (wi > c)              // sığmaz
▶          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
10         K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
11                            vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0			
2	4	3	0						
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=1, c=3: w=4 > 3, eşya **sığmaz** → üstteki değer kopyalanır: K[1][3] = **0**

Adım 4 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `c = 3` `vi = 5` `wi = 4` `alma = 0` `al = –`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5		
2	4	3	0						
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=1, c=4: max(alma = 0, al = 5 + K[0][0] = 5) = **5** (al)

Adım 5 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `c = 4` `vi = 5` `wi = 4` `alma = 0` `al = 5`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	
2	4	3	0						
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=1, c=5: max(alma = 0, al = 5 + K[0][1] = 5) = **5** (al)

Adım 6 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `c = 5` `vi = 5` `wi = 4` `alma = 0` `al = 5`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0						
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=1, c=6: max(alma = 0, al = 5 + K[0][2] = 5) = **5** (al)

Adım 7 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `c = 6` `vi = 5` `wi = 4` `alma = 0` `al = 5`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
▶        if (wi > c)              // sığmaz
▶          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
10         K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
11                            vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0					
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=2, c=1: w=3 > 1, eşya **sığmaz** → üstteki değer kopyalanır: K[2][1] = **0**

Adım 8 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `c = 1` `vi = 4` `wi = 3` `alma = 0` `al = –`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
▶        if (wi > c)              // sığmaz
▶          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
10         K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
11                            vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0				
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=2, c=2: w=3 > 2, eşya **sığmaz** → üstteki değer kopyalanır: K[2][2] = **0**

Adım 9 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `c = 2` `vi = 4` `wi = 3` `alma = 0` `al = –`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4			
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=2, c=3: max(alma = 0, al = 4 + K[1][0] = 4) = **4** (al)

Adım 10 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `c = 3` `vi = 4` `wi = 3` `alma = 0` `al = 4`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5		
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=2, c=4: max(alma = 5, al = 4 + K[1][1] = 4) = **5** (alma)

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `c = 4` `vi = 4` `wi = 3` `alma = 5` `al = 4`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=2, c=5: max(alma = 5, al = 4 + K[1][2] = 4) = **5** (alma)

Adım 12 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `c = 5` `vi = 4` `wi = 3` `alma = 5` `al = 4`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0						
4	2	1	0						

i=2, c=6: max(alma = 5, al = 4 + K[1][3] = 4) = **5** (alma)

Adım 13 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `c = 6` `vi = 4` `wi = 3` `alma = 5` `al = 4`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
▶        if (wi > c)              // sığmaz
▶          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
10         K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
11                            vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0					
4	2	1	0						

i=3, c=1: w=2 > 1, eşya **sığmaz** → üstteki değer kopyalanır: K[3][1] = **0**

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `c = 1` `vi = 3` `wi = 2` `alma = 0` `al = –`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3				
4	2	1	0						

i=3, c=2: max(alma = 0, al = 3 + K[2][0] = 3) = **3** (al)

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `c = 2` `vi = 3` `wi = 2` `alma = 0` `al = 3`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4			
4	2	1	0						

i=3, c=3: max(alma = 4, al = 3 + K[2][1] = 3) = **4** (alma)

Adım 16 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `c = 3` `vi = 3` `wi = 2` `alma = 4` `al = 3`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5		
4	2	1	0						

i=3, c=4: max(alma = 5, al = 3 + K[2][2] = 3) = **5** (alma)

Adım 17 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `c = 4` `vi = 3` `wi = 2` `alma = 5` `al = 3`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	
4	2	1	0						

i=3, c=5: max(alma = 5, al = 3 + K[2][3] = 7) = **7** (al)

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `c = 5` `vi = 3` `wi = 2` `alma = 5` `al = 7`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0						

i=3, c=6: max(alma = 5, al = 3 + K[2][4] = 8) = **8** (al)

Adım 19 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `c = 6` `vi = 3` `wi = 2` `alma = 5` `al = 8`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```java
int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
  int n = v.length;
  int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int c = 1; c <= W; c++) {
      int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
      if (wi > c)              // sığmaz
        K[i][c] = K[i - 1][c];
      else                     // alma / al
        K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
                           vi + K[i - 1][c - wi]);
    }
  return K[n][W];
}
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2					

i=4, c=1: max(alma = 0, al = 2 + K[3][0] = 2) = **2** (al)

Adım 20 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `c = 1` `vi = 2` `wi = 1` `alma = 0` `al = 2`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3				

i=4, c=2: max(alma = 3, al = 2 + K[3][1] = 2) = **3** (alma)

Adım 21 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `c = 2` `vi = 2` `wi = 1` `alma = 3` `al = 2`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

			c (kapasite) →						
i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5			

i=4, c=3: max(alma = 4, al = 2 + K[3][2] = 5) = **5** (al)

Adım 22 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `c = 3` `vi = 2` `wi = 1` `alma = 4` `al = 5`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6		

i=4, c=4: max(alma = 5, al = 2 + K[3][3] = 6) = **6** (al)

Adım 23 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `c = 4` `vi = 2` `wi = 1` `alma = 5` `al = 6`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```
1  int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
2    int n = v.length;
3    int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int c = 1; c <= W; c++) {
6        int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
7        if (wi > c)              // sığmaz
8          K[i][c] = K[i - 1][c];
9        else                     // alma / al
▶          K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
▶                             vi + K[i - 1][c - wi]);
12     }
13   return K[n][W];
14 }
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	

i=4, c=5: max(alma = 7, al = 2 + K[3][4] = 7) = **7** (alma)

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `c = 5` `vi = 2` `wi = 1` `alma = 7` `al = 7`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```java
int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
  int n = v.length;
  int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int c = 1; c <= W; c++) {
      int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
      if (wi > c)              // sığmaz
        K[i][c] = K[i - 1][c];
      else                     // alma / al
        K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
                           vi + K[i - 1][c - wi]);
    }
  return K[n][W];
}
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	9

i=4, c=6: max(alma = 8, al = 2 + K[3][5] = 9) = **9** (al)

Adım 25 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `c = 6` `vi = 2` `wi = 1` `alma = 8` `al = 9`

0/1 Sırt Çantası: Tablo Doldurma (W = 6)

```java
int sirtCantasi(int[] v, int[] w, int W) {
  int n = v.length;
  int[][] K = new int[n + 1][W + 1];
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int c = 1; c <= W; c++) {
      int vi = v[i - 1], wi = w[i - 1];
      if (wi > c)              // sığmaz
        K[i][c] = K[i - 1][c];
      else                     // alma / al
        K[i][c] = Math.max(K[i - 1][c],
                           vi + K[i - 1][c - wi]);
    }
  return K[n][W];
}
```

c (kapasite) →

i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	**9**

Tablo doldu. Cevap `K[4][6]` = **9**. Toplam 4 × 6 = 24 hücre, her biri O(1).

Adım 26 / 26

DEĞİŞKENLER

`i = 5` `c = –` `sonuc = 9`

Geri Okuma: Hangi Eşyalar Alındı?

Kural: K[i][c] ≠ K[i−1][c] ise eşya i alınmıştır (değer ancak onu alarak arttı) → c ← c − w_i; eşitse alınmamıştır.

			c (kapasite) →						
i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	**9**

Geri okuma `K[4][6] = 9` hücresinden başlar. Hangi eşyalar alındı?

Geri Okuma: Hangi Eşyalar Alındı?

Kural: K[i][c] ≠ K[i−1][c] ise eşya i alınmıştır (değer ancak onu alarak arttı) → c ← c − w_i; eşitse alınmamıştır.

			c (kapasite) →						
i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	9

K[4][6] = 9 ≠ K[3][6] = 8 → eşya 4 **alındı** (v=2, w=1); c = 6 − 1 = 5

Geri Okuma: Hangi Eşyalar Alındı?

Kural: K[i][c] ≠ K[i−1][c] ise eşya i alınmıştır (değer ancak onu alarak arttı) → c ← c − w_i; eşitse alınmamıştır.

			c (kapasite) →						
i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	9

K[3][5] = 7 ≠ K[2][5] = 5 → eşya 3 **alındı** (v=3, w=2); c = 5 − 2 = 3

Geri Okuma: Hangi Eşyalar Alındı?

Kural: K[i][c] ≠ K[i−1][c] ise eşya i alınmıştır (değer ancak onu alarak arttı) → c ← c − w_i; eşitse alınmamıştır.

			c (kapasite) →						
i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	9

K[2][3] = 4 ≠ K[1][3] = 0 → eşya 2 **alındı** (v=4, w=3); c = 3 − 3 = 0

Geri Okuma: Hangi Eşyalar Alındı?

Kural: K[i][c] ≠ K[i−1][c] ise eşya i alınmıştır (değer ancak onu alarak arttı) → c ← c − w_i; eşitse alınmamıştır.

			c (kapasite) →						
i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	9

K[1][0] = K[0][0] = 0 → eşya 1 **alınmadı**; c değişmez.

Geri Okuma: Hangi Eşyalar Alındı?

Kural: K[i][c] ≠ K[i−1][c] ise eşya i alınmıştır (değer ancak onu alarak arttı) → c ← c − w_i; eşitse alınmamıştır.

			c (kapasite) →						
i	v	w	0	1	2	3	4	5	6
0			0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	5	5	5
2	4	3	0	0	0	4	5	5	5
3	3	2	0	0	3	4	5	7	8
4	2	1	0	2	3	5	6	7	9

Seçilen eşyalar: 2, 3, 4 → değer 4 + 3 + 2 = **9**, ağırlık 3 + 2 + 1 = **6** = W.

0/1 Sırt Çantası: Karmaşıklık ve Bellek

- **Zaman: O(n · W)**, **bellek: O(n · W)** — (n+1)(W+1) hücre, her biri O(1).
- Bu süre **sözde-polinom**dur (pseudo-polynomial): W'nin *değerine* bağlıdır, bit uzunluğuna değil. W = 10^9 ise tablo kurulamaz.
- 0/1 sırt çantası **NP-zor**dur; DP yalnızca W küçükken pratiktir.
- **Bellek azaltma** (sağdaki kod): satır i yalnızca satır i−1'i kullanır → tek boyutlu dizi, O(W). Kapasite **büyükten küçüğe** gezilmeli; yoksa aynı eşya iki kez alınır.
- Tek boyutlu sürümde geri okuma için ayrıca `boolean[][] dahil` tablosu tutulur.

```
int[] dp = new int[W + 1];
for (int i = 0; i < n; i++)
  for (int c = W; c >= w[i]; c--)
    dp[c] = Math.max(dp[c],
                     v[i] + dp[c - w[i]]);
return dp[W];
```

0/1 Sırt Çantası: Tek Satırla (W = 6)

```
int[] dp = new int[W + 1];
for (int i = 0; i < n; i++)
  for (int c = W; c >= w[i]; c--)
    dp[c] = Math.max(dp[c],
            v[i] + dp[c - w[i]]);
return dp[W];
```

dp	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0	0

eşya	v=5 w=4	v=4 w=3	v=3 w=2	v=2 w=1

Eşyalar (v, w): (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1); W = 6. 2B tablonun yerine tek satır: dp[c] = şimdiye kadarki eşyalarla c kapasitede en iyi değer.

Adım 1 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = –` `c = –` `dp[W] = 0`

0/1 Sırt Çantası: Tek Satırla (W = 6)

```
1 int[] dp = new int[W + 1];
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int c = W; c >= w[i]; c--)
      dp[c] = Math.max(dp[c],
              v[i] + dp[c - w[i]]);
6 return dp[W];
```



Eşya 0 (v = 5, w = 4), c = 6'dan 4'e **azalarak**: dp[6]: 0 → 5, dp[5]: 0 → 5, dp[4]: 0 → 5. Azalan sıra sayesinde dp[c − 4] hep eski (0) değerdir: eşya iki kez alınamaz.

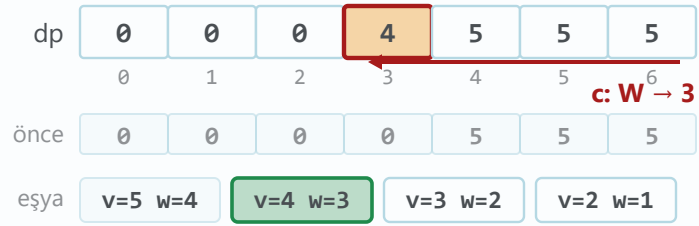
Adım 2 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 0` `c = 4` `dp[W] = 5`

0/1 Sırt Çantası: Tek Satırla (W = 6)

```
1 int[] dp = new int[W + 1];
▶ for (int i = 0; i < n; i++)
▶   for (int c = W; c >= w[i]; c--)
▶     dp[c] = Math.max(dp[c],
▶             v[i] + dp[c - w[i]]);
6 return dp[W];
```



Eşya 1 (v = 4, w = 3), c = 6'dan 3'e **azalarak**: dp[3]: 0 → 4.

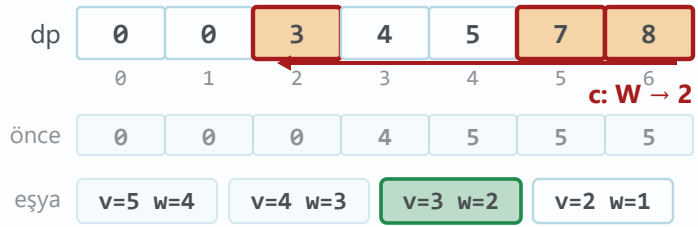
Adım 3 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `c = 3` `dp[W] = 5`

0/1 Sırt Çantası: Tek Satırla (W = 6)

```
1 int[] dp = new int[W + 1];
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int c = W; c >= w[i]; c--)
      dp[c] = Math.max(dp[c],
              v[i] + dp[c - w[i]]);
6 return dp[W];
```



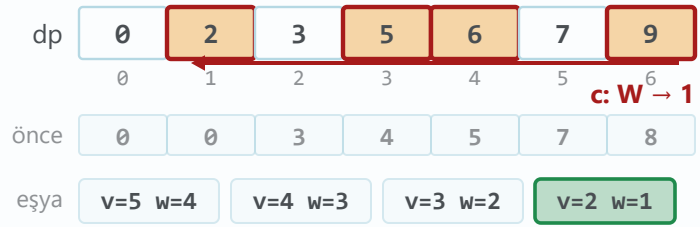
Eşya 2 (v = 3, w = 2), c = 6'dan 2'ye **azalarak**: dp[6]: 5 → 8, dp[5]: 5 → 7, dp[2]: 0 → 3.

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `c = 2` `dp[W] = 8`

0/1 Sırt Çantası: Tek Satırla (W = 6)

```
1 int[] dp = new int[W + 1];
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int c = W; c >= w[i]; c--)
      dp[c] = Math.max(dp[c],
              v[i] + dp[c - w[i]]);
6 return dp[W];
```



Eşya 3 (v = 2, w = 1), c = 6'dan 1'e **azalarak**: dp[6]: 8 → 9, dp[4]: 5 → 6, dp[3]: 4 → 5, dp[1]: 0 → 2.

Adım 5 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `c = 1` `dp[W] = 9`

0/1 Sırt Çantası: Tek Satırla (W = 6)

```
1 int[] dp = new int[W + 1];
2 for (int i = 0; i < n; i++)
3   for (int c = W; c >= w[i]; c--)
4     dp[c] = Math.max(dp[c],
5             v[i] + dp[c - w[i]]);
▶ return dp[W];
```

dp	0	2	3	5	6	7	9
	0	1	2	3	4	5	6

eşya	v=5 w=4	v=4 w=3	v=3 w=2	v=2 w=1

dp[6] = **9** (eşya 1, 2, 3: 4 + 3 + 2), 2B tablonun sağ alt hücresiyle aynı; bellek O(n · W) yerine O(W).

Adım 6 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `c = –` `dp[W] = 9`

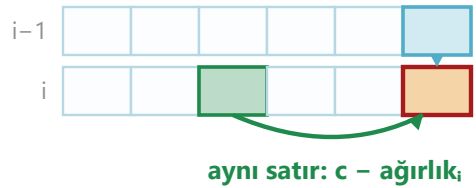
Sınırsız Sırt Çantası (Unbounded Knapsack)

- Her eşyadan **istenildiği kadar** (sınırsız sayıda) alınabilir; gerisi 0/1 ile aynıdır.
- **Durum:** dp[i][c] = 0..i eşya türleri ve c kapasite ile en büyük kâr.

$$dp[i][c] = \max(\, dp[i-1][c] \,,\, kâr_i + dp[\mathbf{i}][c - ağırlık_i] \,) \quad (ağırlık_i \le c \text{ ise})$$

0/1 ile tek fark

"Alırsam" durumunda **aynı satıra** (i) bakılır, üst satıra (i−1) değil: eşyayı aldıktan sonra yine alabilirim.



Örnek

Kâr = [15, 50, 60, 90], ağırlık = [1, 3, 4, 5], kapasite = 8. Tablo 4 × 9; ilk satırda yalnızca eşya 0 (15 kâr, 1 kg) kullanılabilir.

Satır indisi 0'dan başlar (dp[−1][c] = 0 kabul edilir).

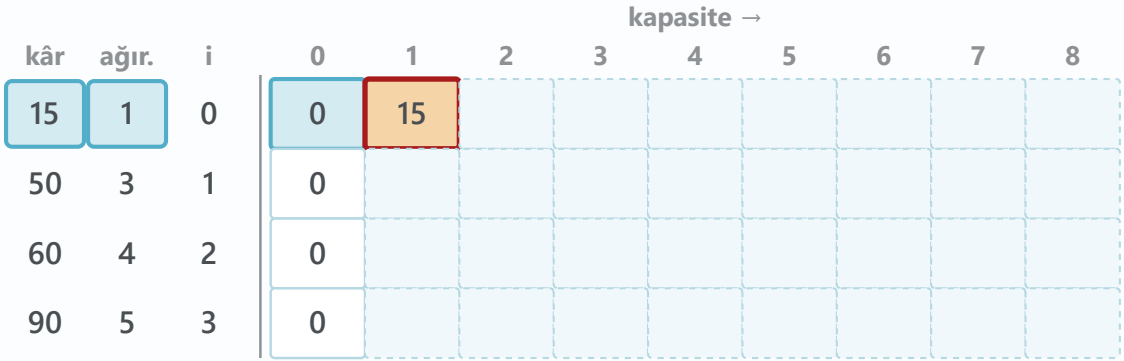
Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

kapasite →

kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0								
50	3	1	0								
60	4	2	0								
90	5	3	0								

Kapasite 0 sütunu 0'dır: hiçbir eşya sığmaz.

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma



i=0, c=1: yalnızca eşya 0 var, ağırlığı 1 sığar → 15 + dp[0][0] = **15**.

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

kâr	ağır.	i	kapasite → 0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0								
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=0, c=2..8: dp[0][c] = 15 + dp[0][c−1] → eşya 0'dan c tane: 30, 45, …, **120**. Aynı satır tekrar kullanıldı!

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15							
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=1: ağırlık 3 > 1, sığmaz → dp[1][1] = dp[0][1] = **15**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30						
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=2: ağırlık 3 > 2, sığmaz → dp[1][2] = dp[0][2] = **30**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50					
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=3: max(dp[0][3] = 45, 50 + dp[1][0] = 50) = **50**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65				
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=4: max(dp[0][4] = 60, 50 + dp[1][1] = 65) = **65**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80			
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=5: max(dp[0][5] = 75, 50 + dp[1][2] = 80) = **80**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100		
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=6: max(dp[0][6] = 90, 50 + dp[1][3] = 100) = **100**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=7: max(dp[0][7] = 105, 50 + dp[1][4] = 115) = **115**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

kâr	ağır.	i	kapasite → 0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0								
90	5	3	0								

i=1, c=8: max(dp[0][8] = 120, 50 + dp[1][5] = 130) = **130**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15							
90	5	3	0								

i=2, c=1: ağırlık 4 > 1, sığmaz → dp[2][1] = dp[1][1] = **15**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30						
90	5	3	0								

i=2, c=2: ağırlık 4 > 2, sığmaz → dp[2][2] = dp[1][2] = **30**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50					
90	5	3	0								

i=2, c=3: ağırlık 4 > 3, sığmaz → dp[2][3] = dp[1][3] = **50**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65				
90	5	3	0								

i=2, c=4: max(dp[1][4] = 65, 60 + dp[2][0] = 60) = **65**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

kâr	ağır.	i	kapasite → 0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80			
90	5	3	0								

i=2, c=5: max(dp[1][5] = 80, 60 + dp[2][1] = 75) = **80**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100		
90	5	3	0								

i=2, c=6: max(dp[1][6] = 100, 60 + dp[2][2] = 90) = **100**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

kâr	ağır.	i	kapasite → 0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	
90	5	3	0								

i=2, c=7: max(dp[1][7] = 115, 60 + dp[2][3] = 110) = **115**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0								

i=2, c=8: max(dp[1][8] = 130, 60 + dp[2][4] = 125) = **130**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15							

i=3, c=1: ağırlık 5 > 1, sığmaz → dp[3][1] = dp[2][1] = **15**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30						

i=3, c=2: ağırlık 5 > 2, sığmaz → dp[3][2] = dp[2][2] = **30**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30	50					

i=3, c=3: ağırlık 5 > 3, sığmaz → dp[3][3] = dp[2][3] = **50**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30	50	65				

i=3, c=4: ağırlık 5 > 4, sığmaz → dp[3][4] = dp[2][4] = **65**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

kâr	ağır.	i	kapasite → 0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30	50	65	90			

i=3, c=5: max(dp[2][5] = 80, 90 + dp[3][0] = 90) = **90**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30	50	65	90	105		

i=3, c=6: max(dp[2][6] = 100, 90 + dp[3][1] = 105) = **105**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30	50	65	90	105	120	

i=3, c=7: max(dp[2][7] = 115, 90 + dp[3][2] = 120) = **120**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30	50	65	90	105	120	140

i=3, c=8: max(dp[2][8] = 130, 90 + dp[3][3] = 140) = **140**

Sınırsız Sırt Çantası: Tablo Doldurma

			kapasite →								
kâr	ağır.	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120
50	3	1	0	15	30	50	65	80	100	115	130
60	4	2	0	15	30	50	65	80	100	115	130
90	5	3	0	15	30	50	65	90	105	120	140

Cevap dp[3][8] = **140**: 90 + dp[3][3] = 90 + 50 → bir tane eşya 3 (90, 5 kg) + bir tane eşya 1 (50, 3 kg).

Sınırsız Sırt Çantası: Tek Boyutlu Çözüm

```
static int sinirsizSirtCantasi(int[] w, int[] v, int W) {
  int[] dp = new int[W + 1];       // dp[c]: c kapasiteyle en iyi
  for (int c = 1; c <= W; c++)
    for (int j = 0; j < w.length; j++)
      if (w[j] <= c)
        dp[c] = Math.max(dp[c], dp[c - w[j]] + v[j]);
  return dp[W];
}
```

- Satırlar birleştirilebilir: dp[c] = **tüm eşyalar** için max(dp[c − w_j] + v_j).
- Örnek için dp = [0, 15, 30, 50, 65, 90, 105, 120, **140**] — tablonun son satırı.
- Zaman **O(n · W)**, bellek **O(W)**.

Döngü yönü her şeyi belirler

Tek boyutlu dizide kapasite **küçükten büyüğe** gezilirse dp[c − w] bu tur güncellenmiş olur → eşya tekrar alınabilir (**sınırsız**). **Büyükten küçüğe** gezilirse eski değer okunur → **0/1**.

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1  static int sinirsizSirtCantasi(
2      int[] w, int[] v, int W) {
3    int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
4    for (int c = 1; c <= W; c++)
5      for (int j = 0; j < w.length; j++)
6        if (w[j] <= c)
7          dp[c] = Math.max(dp[c],
8                    dp[c - w[j]] + v[j]);
9    return dp[W];
10 }
```



Kâr [15, 50, 60, 90], ağırlık [1, 3, 4, 5], W = 8. dp[c] = c kapasiteyle en büyük kâr; dp[0] = 0 ve diğerleri henüz hesaplanmadı.

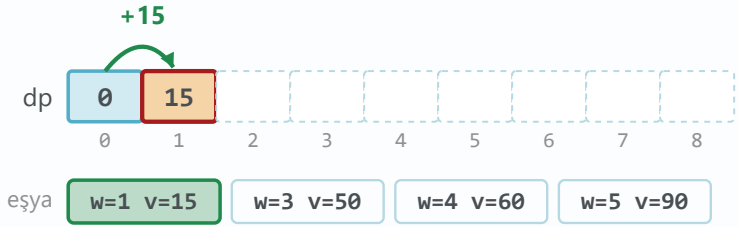
Adım 1 / 10

DEĞİŞKENLER

`W = 8` `c = –` `dp[c] = –`

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1  static int sinirsizSirtCantasi(
2      int[] w, int[] v, int W) {
3    int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
▶    for (int c = 1; c <= W; c++)
▶      for (int j = 0; j < w.length; j++)
▶        if (w[j] <= c)
▶          dp[c] = Math.max(dp[c],
▶                           dp[c - w[j]] + v[j]);
9    return dp[W];
10 }
```



c = 1: dp[0] + 15 = 15 → dp[1] = **15**.

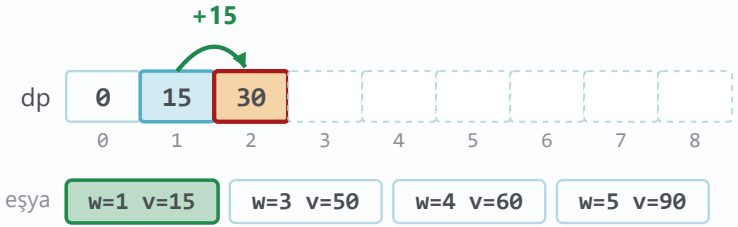
Adım 2 / 10

DEĞİŞKENLER

`W = 8` `c = 1` `dp[c] = 15`

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1 static int sinirsizSirtCantasi(
2     int[] w, int[] v, int W) {
3   int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
    for (int c = 1; c <= W; c++)
      for (int j = 0; j < w.length; j++)
        if (w[j] <= c)
          dp[c] = Math.max(dp[c],
                           dp[c - w[j]] + v[j]);
9   return dp[W];
10 }
```



c = 2: dp[1] + 15 = 30 → dp[2] = **30**. Eşya 0 ikinci kez alındı: dp[1] bu turda güncellenmişti (sınırsız).

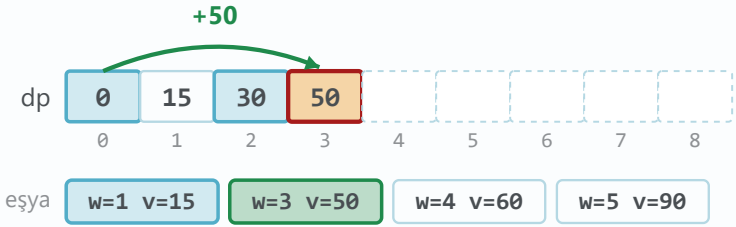
Adım 3 / 10

DEĞİŞKENLER

W = 8 | c = 2 | dp[c] = 30

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1  static int sinirsizSirtCantasi(
2      int[] w, int[] v, int W) {
3    int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
▶    for (int c = 1; c <= W; c++)
▶      for (int j = 0; j < w.length; j++)
▶        if (w[j] <= c)
▶          dp[c] = Math.max(dp[c],
▶                           dp[c - w[j]] + v[j]);
9    return dp[W];
10 }
```



c = 3: dp[2] + 15 = 45, dp[0] + 50 = 50 → dp[3] = **50**.

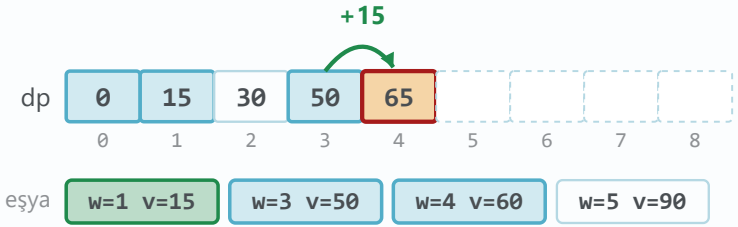
Adım 4 / 10

DEĞİŞKENLER

`W = 8` `c = 3` `dp[c] = 50`

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1 static int sinirsizSirtCantasi(
2     int[] w, int[] v, int W) {
3   int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
    for (int c = 1; c <= W; c++)
      for (int j = 0; j < w.length; j++)
        if (w[j] <= c)
          dp[c] = Math.max(dp[c],
                           dp[c - w[j]] + v[j]);
9   return dp[W];
10 }
```



c = 4: dp[3] + 15 = 65, dp[1] + 50 = 65, dp[0] + 60 = 60 → dp[4] = **65**.

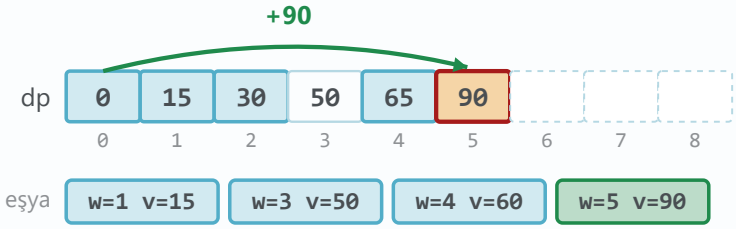
Adım 5 / 10

DEĞİŞKENLER

W = 8 | c = 4 | dp[c] = 65

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1 static int sinirsizSirtCantasi(
2     int[] w, int[] v, int W) {
3   int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
    for (int c = 1; c <= W; c++)
      for (int j = 0; j < w.length; j++)
        if (w[j] <= c)
          dp[c] = Math.max(dp[c],
                           dp[c - w[j]] + v[j]);
9   return dp[W];
10 }
```



c = 5: dp[4] + 15 = 80, dp[2] + 50 = 80, dp[1] + 60 = 75, dp[0] + 90 = 90 → dp[5] = **90**.

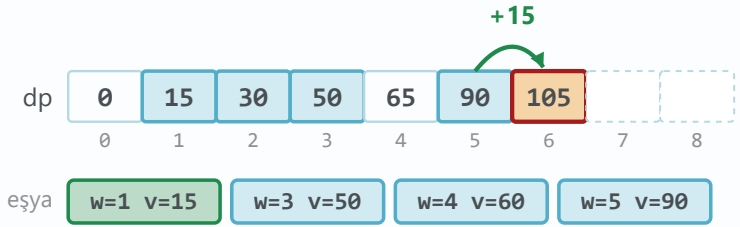
Adım 6 / 10

DEĞİŞKENLER

W = 8 | c = 5 | dp[c] = 90

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1 static int sinirsizSirtCantasi(
2     int[] w, int[] v, int W) {
3   int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
▶   for (int c = 1; c <= W; c++)
▶     for (int j = 0; j < w.length; j++)
▶       if (w[j] <= c)
▶         dp[c] = Math.max(dp[c],
▶                  dp[c - w[j]] + v[j]);
9   return dp[W];
10 }
```



c = 6: dp[5] + 15 = 105, dp[3] + 50 = 100, dp[2] + 60 = 90, dp[1] + 90 = 105 → dp[6] = **105**.

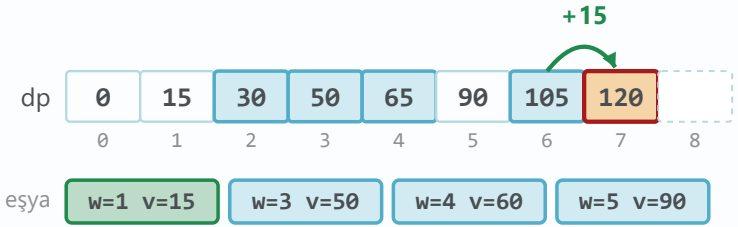
Adım 7 / 10

DEĞİŞKENLER

`W = 8` `c = 6` `dp[c] = 105`

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1 static int sinirsizSirtCantasi(
2     int[] w, int[] v, int W) {
3   int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
    for (int c = 1; c <= W; c++)
      for (int j = 0; j < w.length; j++)
        if (w[j] <= c)
          dp[c] = Math.max(dp[c],
                           dp[c - w[j]] + v[j]);
9   return dp[W];
10 }
```



c = 7: dp[6] + 15 = 120, dp[4] + 50 = 115, dp[3] + 60 = 110, dp[2] + 90 = 120 → dp[7] = **120**.

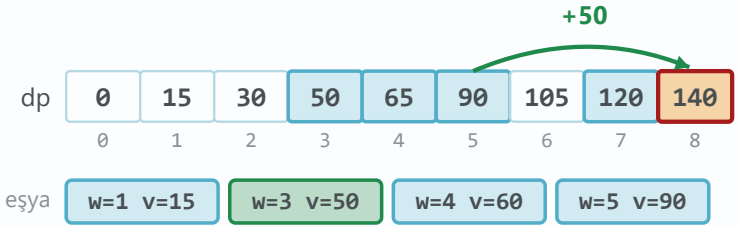
Adım 8 / 10

DEĞİŞKENLER

W = 8 | c = 7 | dp[c] = 120

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1  static int sinirsizSirtCantasi(
2      int[] w, int[] v, int W) {
3    int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
▶    for (int c = 1; c <= W; c++)
▶      for (int j = 0; j < w.length; j++)
▶        if (w[j] <= c)
▶          dp[c] = Math.max(dp[c],
▶                           dp[c - w[j]] + v[j]);
9    return dp[W];
10 }
```



c = 8: dp[7] + 15 = 135, dp[5] + 50 = 140, dp[4] + 60 = 125, dp[3] + 90 = 140 → dp[8] = **140**.

Adım 9 / 10

DEĞİŞKENLER

`W = 8` `c = 8` `dp[c] = 140`

sinirsizSirtCantasi(w, v, 8)

```
1  static int sinirsizSirtCantasi(
2      int[] w, int[] v, int W) {
3    int[] dp = new int[W + 1];  // dp[c]
4    for (int c = 1; c <= W; c++)
5      for (int j = 0; j < w.length; j++)
6        if (w[j] <= c)
7          dp[c] = Math.max(dp[c],
8                    dp[c - w[j]] + v[j]);
▶    return dp[W];
10 }
```

dp	0	15	30	50	65	90	105	120	140
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

eşya	w=1 v=15	w=3 v=50	w=4 v=60	w=5 v=90

dp[8] = **140**: 50 + 90 (3 kg + 5 kg). Aynı kârı veren 15 + 15 + 50 + 60 ise 9 kg'dır, sığmaz; tablo tüm birleşimleri O(n · W)'de denedi.

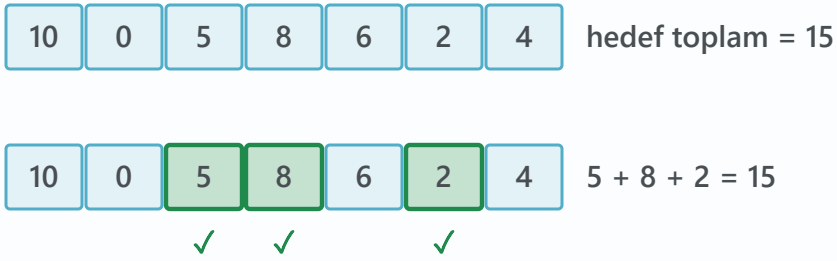
Adım 10 / 10

DEĞİŞKENLER

`W = 8` `c = 9` `dp[c] = –`

ALT KÜME TOPLAMI

Alt Küme Toplamı (Subset Sum)



- Verilen tam sayılardan, toplamı tam olarak **hedef** değere eşit olan bir alt küme var mı? (Karar problemi: evet / hayır.)
- **Durum:** dp[i][j] = ilk i öğeyle toplam j elde edilebilir mi? (boolean)

dp[i][0] = doğru · dp[0][j] = yanlış (j > 0)
dp[i][j] = dp[i−1][j] **veya** ($a_i \le j$ **ve** dp[i−1][j − a_i])

Sırt çantasının "değer = ağırlık" özel durumudur: max yerine mantıksal **veya** kullanılır.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓															
2	0	✓															
3	5	✓															
4	8	✓															
5	6	✓															
6	2	✓															
7	4	✓															

Sütun 0 hep ✓ (boş küme toplamı 0). Satır 0'da (öğe yok) diğer toplamlar elde edilemez (·).

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓															
3	5	✓															
4	8	✓															
5	6	✓															
6	2	✓															
7	4	✓															

i=1, a=10: satır i−1 kopyalanır, ayrıca dp[i−1][j−10] ✓ olan her j için ✓ → yeni ulaşılan toplamlar: 10.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓															
4	8	✓															
5	6	✓															
6	2	✓															
7	4	✓															

i=2, a=0: satır i−1 kopyalanır, ayrıca dp[i−1][j−0] ✓ olan her j için ✓ → yeni toplam yok (0 eklemek hiçbir toplamı değiştirmez).

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓															
5	6	✓															
6	2	✓															
7	4	✓															

i=3, a=5: satır i−1 kopyalanır, ayrıca dp[i−1][j−5] ✓ olan her j için ✓ → yeni ulaşılan toplamlar: 5, 15.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓															
6	2	✓															
7	4	✓															

i=4, a=8: satır i−1 kopyalanır, ayrıca dp[i−1][j−8] ✓ olan her j için ✓ → yeni ulaşılan toplamlar: 8, 13.

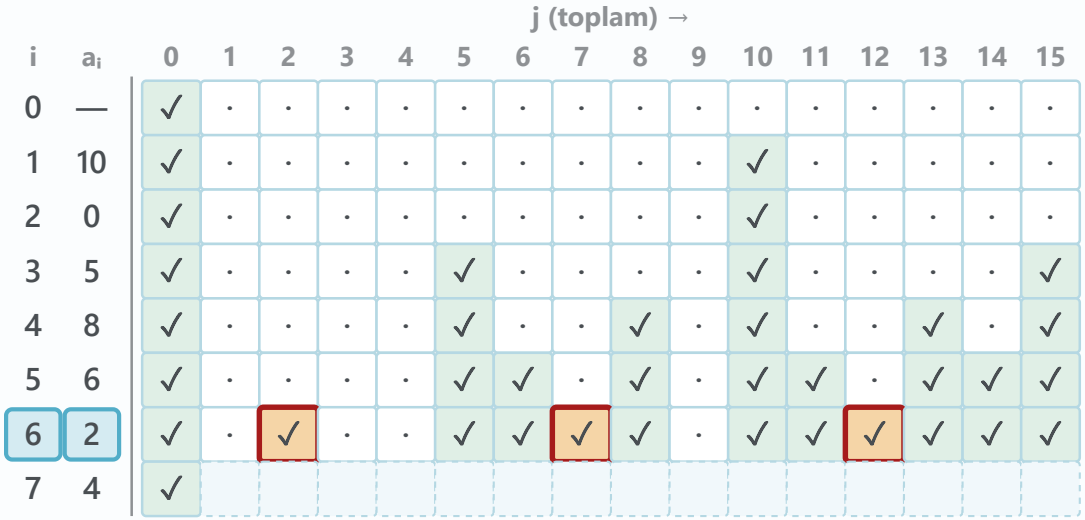
Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓															
7	4	✓															

i=5, a=6: satır i−1 kopyalanır, ayrıca dp[i−1][j−6] ✓ olan her j için ✓ → yeni ulaşılan toplamlar: 6, 11, 14.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)



i=6, a=2: satır i−1 kopyalanır, ayrıca dp[i−1][j−2] ✓ olan her j için ✓ → yeni ulaşılan toplamlar: 2, 7, 12.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

i=7, a=4: satır i−1 kopyalanır, ayrıca dp[i−1][j−4] ✓ olan her j için ✓ → yeni ulaşılan toplamlar: 4, 9.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

dp[7][15] = dp[6][15] = ✓ → 4 olmadan da toplam 15 mümkün; seçilmez, yukarı çık.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

dp[6][15] = dp[5][15] = ✓ → 2 olmadan da toplam 15 mümkün; seçilmez, yukarı çık.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

dp[5][15] = dp[4][15] = ✓ → 6 olmadan da toplam 15 mümkün; seçilmez, yukarı çık.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

dp[4][15] = dp[3][15] = ✓ → 8 olmadan da toplam 15 mümkün; seçilmez, yukarı çık.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

dp[3][15] ✓ ama dp[2][15] · → 5 **seçildi**; j = 15 − 5 = 10

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

		j (toplam) →															
i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

dp[2][10] = dp[1][10] = ✓ → 0 olmadan da toplam 10 mümkün; seçilmez, yukarı çık.

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

j (toplam) →

i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

dp[1][10] ✓ ama dp[0][10] · → 10 **seçildi**; j = 10 − 10 = 0

Alt Küme Toplamı: Tablo (a = 10, 0, 5, 8, 6, 2, 4; hedef 15)

		j (toplam) →															
i	a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	10	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
2	0	✓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	·
3	5	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓	·	·	·	·	✓
4	8	✓	·	·	·	·	✓	·	·	✓	·	✓	·	·	✓	·	✓
5	6	✓	·	·	·	·	✓	✓	·	✓	·	✓	✓	·	✓	✓	✓
6	2	✓	·	✓	·	·	✓	✓	✓	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7	4	✓	·	✓	·	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Geri okuma {5, 10} alt kümesini bulur: 10 + 5 = 15. {5, 8, 2} ve {5, 6, 4} de geçerlidir; tablo yalnızca **birini** verir.

Alt Küme Toplamı: Kod ve Analiz

```
boolean altKume(int[] a, int hedef) {
  int n = a.length;
  boolean[][] dp = new boolean[n + 1][hedef + 1];
  for (int i = 0; i <= n; i++)
    dp[i][0] = true;            // boş küme
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    int x = a[i - 1];
    for (int j = 1; j <= hedef; j++)
      dp[i][j] = dp[i - 1][j]  // x alınmaz
        || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
  }
  return dp[n][hedef];
}
```

- Zaman ve bellek: **O(n · hedef)** — yine sözde-polinom.
- Problem **NP-tam**dır; hedef büyükse tablo kurulamaz.
- Bu örnekte 6 farklı çözüm var: {10, 5}, {5, 8, 2}, {5, 6, 4} ve bunların 0 eklenmiş hâlleri.
- Tek boyutlu sürüm: j **büyükten küçüğe** gezilir (0/1 gibi).
- Uygulama: **eşit bölme** problemi — toplamı S olan diziyi iki eşit parçaya bölmek = hedef S/2 ile alt küme toplamı.

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
▶    boolean[][] dp =
▶        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
8      int x = a[i - 1];
9      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
10       dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
11         || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–	0	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
12	4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	6	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

a = [3, 34, 4, 12, 5, 2], hedef = 9. dp[i][j]: ilk i öğeyle toplam j elde edilebilir mi? Java'da boolean dizi false ile başlar (·).

Adım 1 / 9

DEĞİŞKENLER

n = 6 | i = – | x = –

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
▶    for (int i = 0; i <= n; i++)
▶      dp[i][0] = true;        // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
8      int x = a[i - 1];
9      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
10       dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
11         || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–	0	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	2	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	3	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
12	4	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	5	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	6	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Her satırda dp[i][0] = true: boş küme toplam 0'ı verir. 0. satırın geri kalanı false: hiç öğe yokken pozitif toplam olmaz.

Adım 2 / 9

DEĞİŞKENLER

n = 6 | i = – | x = –

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
▶      int x = a[i - 1];
▶      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
▶        dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
▶          || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–	0	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
34	2	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	3	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
12	4	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	5	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	6	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·

i = 1, x = 3: üst satır aynen iner; ayrıca dp[0][j − 3] doğru olan her j için yeni toplam: **3**.

Adım 3 / 9

DEĞİŞKENLER

n = 6 | i = 1 | x = 3

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
▶      int x = a[i - 1];
▶      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
▶        dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
▶          || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–	0	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
34	2	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
4	3	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
12	4	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	5	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	6	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·

i = 2, x = 34 > 9: x hiçbir j için sığmaz, satır üst satırın kopyasıdır.

Adım 4 / 9

DEĞİŞKENLER

n = 6 | i = 2 | x = 34

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
▶      int x = a[i - 1];
▶      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
▶        dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
▶          || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–	0	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
34	2	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
4	3	T	·	·	T	T	·	·	T	·	·
12	4	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	5	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	6	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·

i = 3, x = 4: üst satır aynen iner; ayrıca dp[2][j − 4] doğru olan her j için yeni toplam: **4**, **7**.

Adım 5 / 9

DEĞİŞKENLER

n = 6 | i = 3 | x = 4

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
▶      int x = a[i - 1];
▶      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
▶        dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
▶          || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–	0	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
34	2	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
4	3	T	·	·	T	T	·	·	T	·	·
12	4	T	·	·	T	T	·	·	T	·	·
5	5	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	6	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·

i = 4, x = 12 > 9: x hiçbir j için sığmaz, satır üst satırın kopyasıdır.

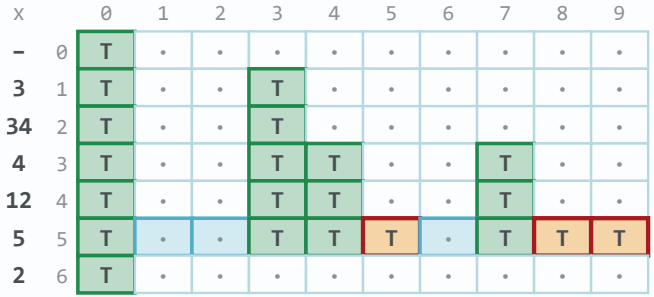
Adım 6 / 9

DEĞİŞKENLER

n = 6 | i = 4 | x = 12

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
▶      int x = a[i - 1];
▶      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
▶        dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
▶          || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```



i = 5, x = 5: üst satır aynen iner; ayrıca dp[4][j − 5] doğru olan her j için yeni toplam: **5**, **8**, **9**. dp[5][9] = dp[4][4] → 4 + 5 = 9 bulundu.

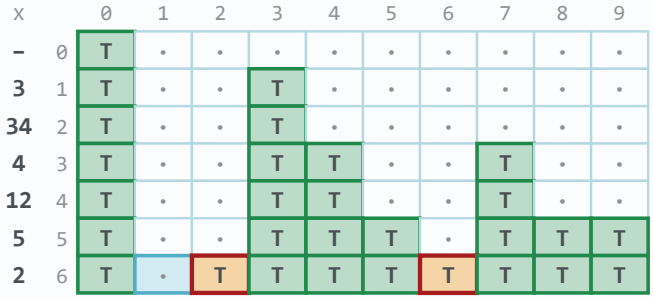
Adım 7 / 9

DEĞİŞKENLER

n = **6** i = **5** x = **5**

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
▶      int x = a[i - 1];
▶      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
▶        dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
▶          || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
13   return dp[n][hedef];
14 }
```



i = 6, x = 2: üst satır aynen iner; ayrıca dp[5][j − 2] doğru olan her j için yeni toplam: **2**, **6**.

Adım 8 / 9

DEĞİŞKENLER

`n = 6` `i = 6` `x = 2`

altKume({3, 34, 4, 12, 5, 2}, 9)

```
1  boolean altKume(int[] a, int hedef) {
2    int n = a.length;
3    boolean[][] dp =
4        new boolean[n + 1][hedef + 1];
5    for (int i = 0; i <= n; i++)
6      dp[i][0] = true;          // boş küme
7    for (int i = 1; i <= n; i++) {
8      int x = a[i - 1];
9      for (int j = 1; j <= hedef; j++)
10       dp[i][j] = dp[i - 1][j] // x alınmaz
11         || (x <= j && dp[i - 1][j - x]);
12   }
▶    return dp[n][hedef];
14 }
```

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–	0	T	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
34	2	T	·	·	T	·	·	·	·	·	·
4	3	T	·	·	T	T	·	·	T	·	·
12	4	T	·	·	T	T	·	·	T	·	·
5	5	T	·	·	T	T	T	·	T	T	T
2	6	T	·	T	T	T	T	T	T	T	T

dp[6][9] = **true**: toplamı 9 olan bir alt küme var (ör. {4, 5} ya da {3, 4, 2}). Tablo (n + 1) × (hedef + 1) = 70 hücre.

Adım 9 / 9

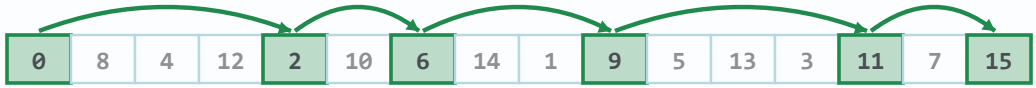
DEĞİŞKENLER

n = **6** | i = **7** | x = **2**

En Uzun Artan Alt Dizi (Longest Increasing Subsequence)

- **Alt dizi** (subsequence): öğeler sırası korunarak, **atlanarak** seçilebilir. **Alt dizgi / alt dizi parçası** (substring, subarray): öğeler **bitişik** olmalıdır.
- LIS: öğeleri **kesin artan** en uzun alt dizi.

0, 8, 4, 12, **2**, 10, **6**, 14, 1, **9**, 5, 13, 3, **11**, 7, **15** → LIS = **0, 2, 6, 9, 11, 15** (uzunluk 6)



O(n^2) DP

dp[i] = a[i]'de **biten** en uzun artan alt dizinin uzunluğu. dp[i] = 1 + max{ dp[j] : j < i, a[j] < a[i] }.

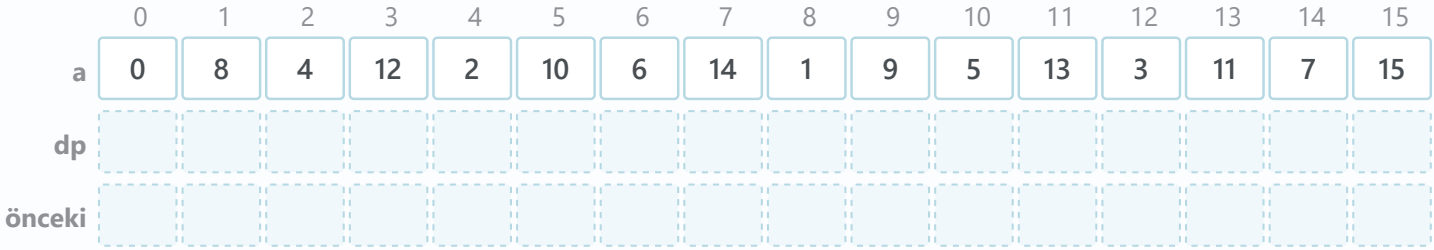
O(n log n): aktif listeler

Her uzunluk için sonu en küçük olan liste tutulur; yeni öğe ikili aramayla yerine konur.

Bu dizinin birden çok LIS'i vardır (ör. 0, 4, 6, 9, 13, 15); uzunluk her zaman tektir.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



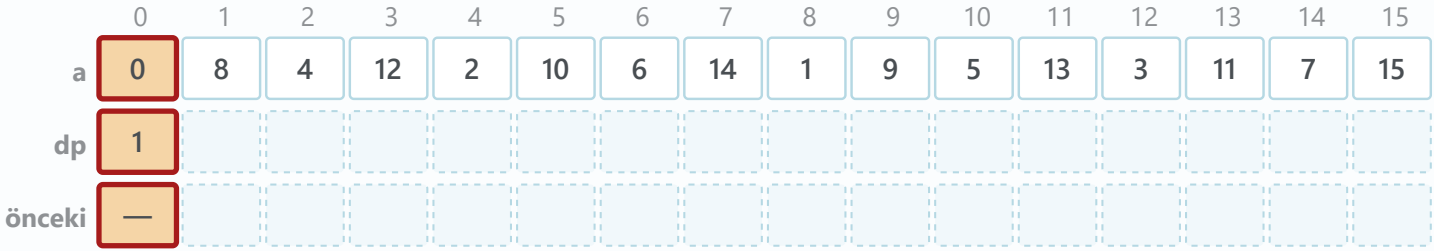
Başlangıç: her öğe tek başına uzunluk 1'lik artan alt dizidir.

Adım 1 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: $O(n^2)$ Dinamik Programlama

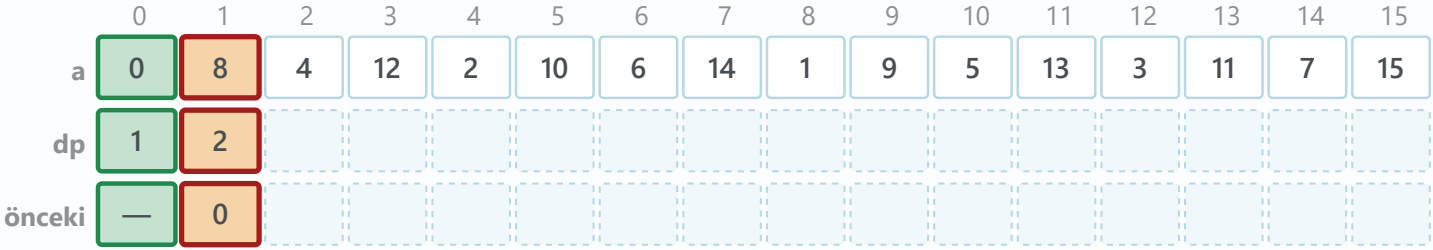


i=0: a[0]=0, öncesinde öğe yok → dp[0] = **1**.

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam $O(n^2)$ karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama

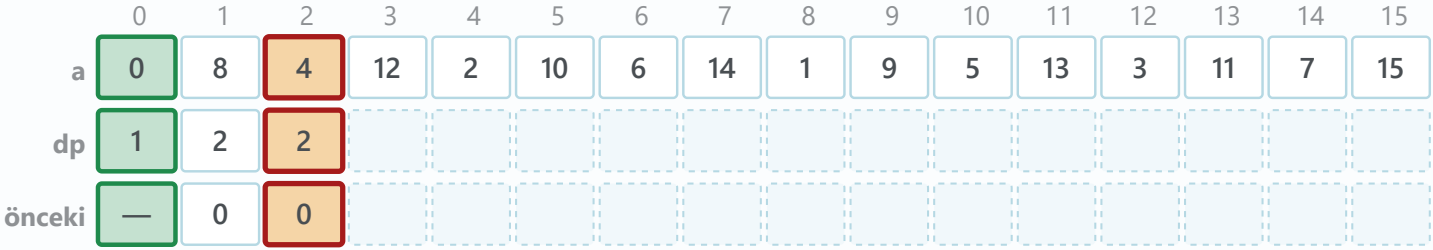


i=1: a[1]=8; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=0 (dp=1) → dp[1] = **2**

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



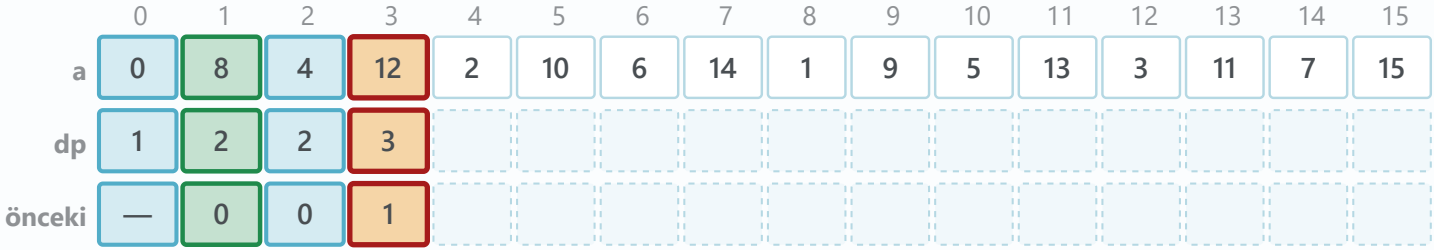
i=2: a[2]=4; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=0 (dp=1) → dp[2] = **2**

Adım 4 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama

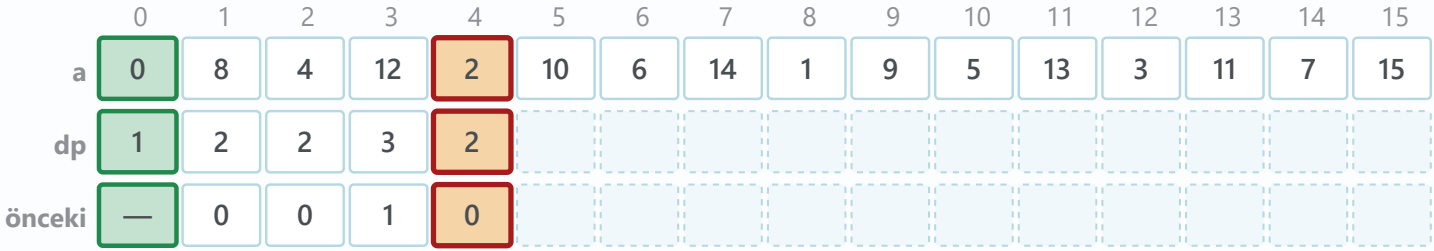


i=3: a[3]=12; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=1 (dp=2) → dp[3] = **3**

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama

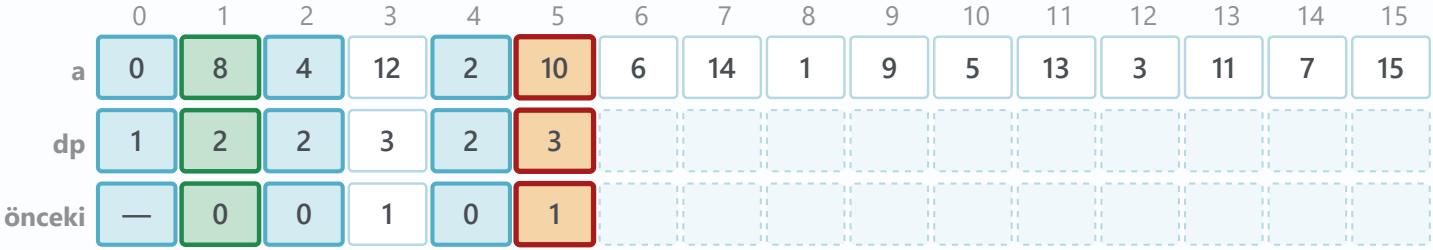


i=4: a[4]=2; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=0 (dp=1) → dp[4] = **2**

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



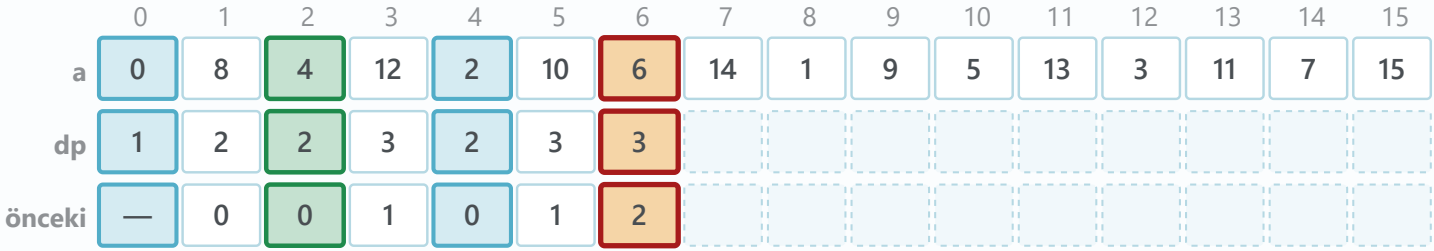
i=5: a[5]=10; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=1 (dp=2) → dp[5] = **3**

Adım 7 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



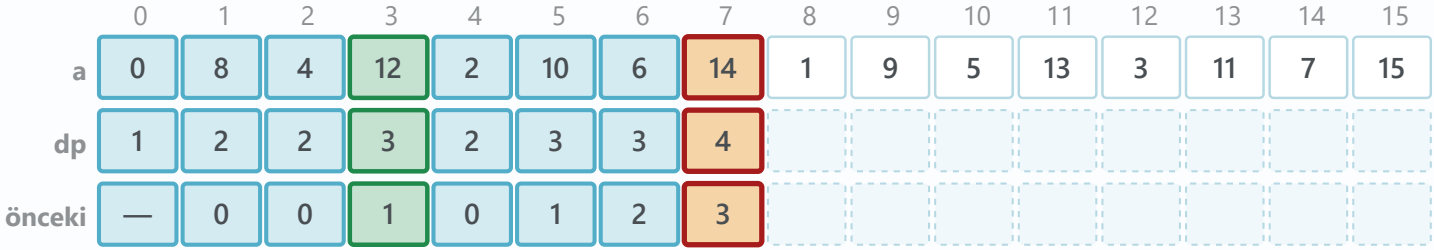
i=6: a[6]=6; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=2 (dp=2) → dp[6] = **3**

Adım 8 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



i=7: a[7]=14; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=3 (dp=3) → dp[7] = **4**

Adım 9 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	8	4	12	2	10	6	14	1	9	5	13	3	11	7	15
dp	1	2	2	3	2	3	3	4	2							
önceki	—	0	0	1	0	1	2	3	0							

i=8: a[8]=1; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=0 (dp=1) → dp[8] = **2**

Adım 10 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: $O(n^2)$ Dinamik Programlama



i=9: a[9]=9; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=6 (dp=3) → dp[9] = **4**

Adım 11 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam $O(n^2)$ karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



i=10: a[10]=5; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=2 (dp=2) → dp[10] = **3**

Adım 12 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



i=11: a[11]=13; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=9 (dp=4) → dp[11] = **5**

Adım 13 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



i=12: a[12]=3; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=4 (dp=2) → dp[12] = **3**

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



i=13: a[13]=11; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=9 (dp=4) → dp[13] = **5**

Adım 15 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



i=14: a[14]=7; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=6 (dp=3) → dp[14] = **4**

Adım 16 / 18

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

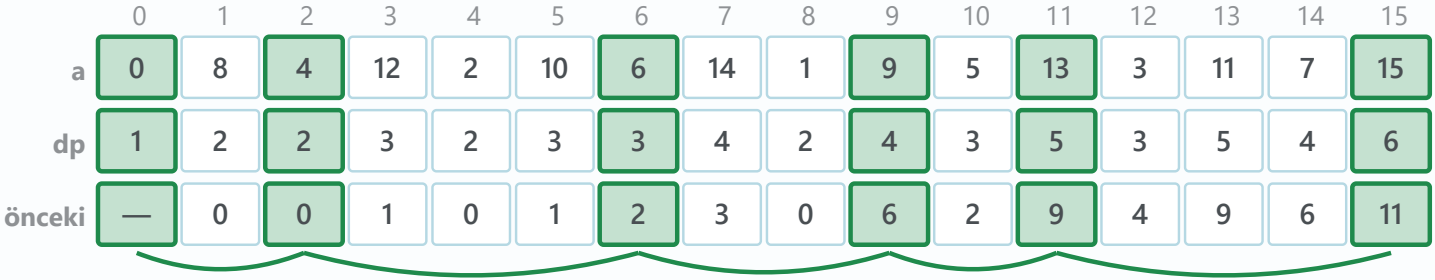
LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



i=15: a[15]=15; küçük öncekiler (mavi) arasında en büyük dp, j=11 (dp=5) → dp[15] = **6**

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

LIS: O(n^2) Dinamik Programlama



En büyük dp = 6 (i=15). `önceki` indisleri izlenir: 15 → 11 → 9 → 6 → 2 → 0 ⇒ **0, 4, 6, 9, 13, 15** (eşitlikte ilk j seçilir; 0, 2, 6, 9, 11, 15 de 6 uzunlukta bir LIS'tir).

Turuncu: işlenen öğe · mavi: a[j] < a[i] olan adaylar · yeşil: en iyi önceki öğe. Toplam O(n^2) karşılaştırma.

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

Liste yok: [0] ile ilk aktif liste başlatılır.

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, **8,** 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

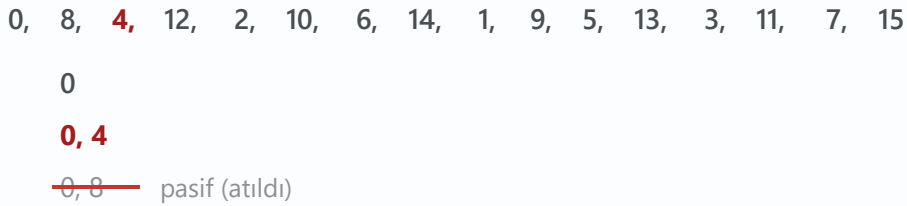
0

0, 8

8 tüm sonlardan büyük: en uzun liste kopyalanıp **8** eklenir (uzunluk 2).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.



4, sonu 0 olan listeyi uzatır → [0, 4]; aynı uzunluktaki [0, 8] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, **12,** 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 4

0, 4, 12

12 tüm sonlardan büyük: en uzun liste kopyalanıp **12** eklenir (uzunluk 3).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.



2, sonu 0 olan listeyi uzatır → [0, 2]; aynı uzunluktaki [0, 4] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, **10,** 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 2

0, 2, 10

~~0, 4, 12~~ pasif (atıldı)

10, sonu 2 olan listeyi uzatır → [0, 2, 10]; aynı uzunluktaki [0, 4, 12] artık gereksiz (sonu daha büyük).

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, **6,** 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 2

0, 2, 6

~~0, 2, 10~~ pasif (atıldı)

6, sonu 2 olan listeyi uzatır → [0, 2, 6]; aynı uzunluktaki [0, 2, 10] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, **14,** 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 2

0, 2, 6

0, 2, 6, 14

14 tüm sonlardan büyük: en uzun liste kopyalanıp **14** eklenir (uzunluk 4).

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, **1,** 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 1

~~0, 2~~ pasif (atıldı)

0, 2, 6

0, 2, 6, 14

1, sonu 0 olan listeyi uzatır → [0, 1]; aynı uzunluktaki [0, 2] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, **9,** 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 1

0, 2, 6

0, 2, 6, 9

~~0, 2, 6, 14~~ pasif (atıldı)

9, sonu 6 olan listeyi uzatır → [0, 2, 6, 9]; aynı uzunluktaki [0, 2, 6, 14] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.



5, sonu 1 olan listeyi uzatır → [0, 1, 5]; aynı uzunluktaki [0, 2, 6] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, **13,** 3, 11, 7, 15

0

0, 1

0, 1, 5

0, 2, 6, 9

0, 2, 6, 9, 13

13 tüm sonlardan büyük: en uzun liste kopyalanıp **13** eklenir (uzunluk 5).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 1

0, 1, 3

~~0, 1, 5~~ pasif (atıldı)

0, 2, 6, 9

0, 2, 6, 9, 13

3, sonu 1 olan listeyi uzatır → [0, 1, 3]; aynı uzunluktaki [0, 1, 5] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, **11,** 7, 15

0

0, 1

0, 1, 3

0, 2, 6, 9

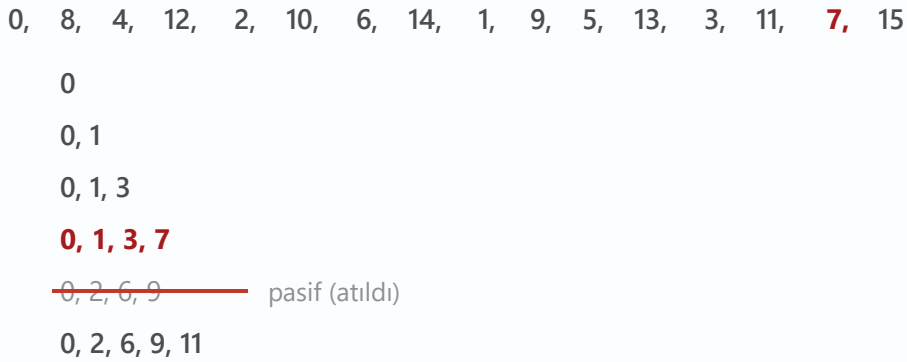
0, 2, 6, 9, 11

~~0, 2, 6, 9, 13~~ pasif (atıldı)

11, sonu 9 olan listeyi uzatır → [0, 2, 6, 9, 11]; aynı uzunluktaki [0, 2, 6, 9, 13] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.



7, sonu 3 olan listeyi uzatır → [0, 1, 3, 7]; aynı uzunluktaki [0, 2, 6, 9] artık gereksiz (sonu daha büyük).

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, **15**

0

0, 1

0, 1, 3

0, 1, 3, 7

0, 2, 6, 9, 11

0, 2, 6, 9, 11, 15

15 tüm sonlardan büyük: en uzun liste kopyalanıp **15** eklenir (uzunluk 6).

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

LIS: Aktif Listeler Yöntemi

Her uzunluk için **sonu en küçük** olan artan liste tutulur; küçük son, gelecekte uzamaya daha açıktır.

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

0

0, 1

0, 1, 3

0, 1, 3, 7

0, 2, 6, 9, 11

0, 2, 6, 9, 11, 15 ← en uzun artan alt dizi

Dizi bitti: en uzun aktif liste **0, 2, 6, 9, 11, 15** → LIS uzunluğu 6.

LIS: $O(n^2)$ Kod

```java
static int lis(int[] a) {
  int n = a.length, enUzun = 0;
  int[] dp = new int[n];
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    dp[i] = 1;                // tek başına
    for (int j = 0; j < i; j++)
      if (a[j] < a[i] && dp[j] + 1 > dp[i])
        dp[i] = dp[j] + 1;    // uzat
    enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
  }
  return enUzun;
}
```

- İç döngü, a[i]'den küçük her önceki öğenin dizisini uzatmayı dener.
- Zaman **$O(n^2)$**, bellek **$O(n)$**.
- Diziyi kurmak için `onceki[i] = j` saklanır ya da sondan başa dp değerleri azalarak taranır.
- Cevap dp[n−1] değil, **max dp[i]**'dir: LIS herhangi bir yerde bitebilir.

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
5      dp[i] = 1;          // tek başına
6      for (int j = 0; j < i; j++)
7        if (a[j] < a[i] &&
8            dp[j] + 1 > dp[i])
9          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
10     enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



a = [5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7]. dp[i] = a[i]'de **biten** en uzun artan alt dizinin uzunluğu; henüz hesaplanmadı.

Adım 1 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = –` `dp[i] = –` `enUzun = 0`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 0, a[i] = 5: solunda küçük öğe yok → dp[0] = 1 (tek başına).

Adım 2 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 0` `dp[i] = 1` `enUzun = 1`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 1, a[i] = 2: solunda küçük öğe yok → dp[1] = 1 (tek başına).

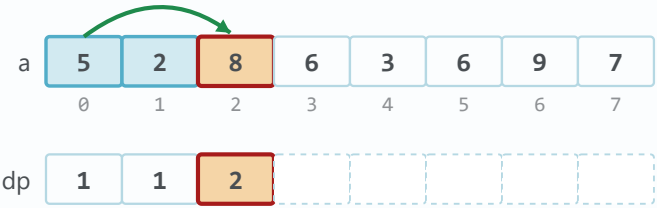
Adım 3 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `dp[i] = 1` `enUzun = 1`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 2, a[i] = 8: soldaki küçükler 5, 2. En uzununu uzatan j = 0 (dp = 1) → dp[2] = **2**.

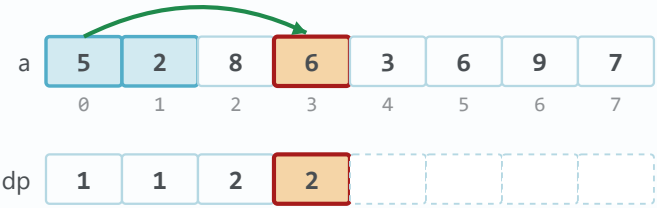
Adım 4 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `dp[i] = 2` `enUzun = 2`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 3, a[i] = 6: soldaki küçükler 5, 2. En uzununu uzatan j = 0 (dp = 1) → dp[3] = **2**.

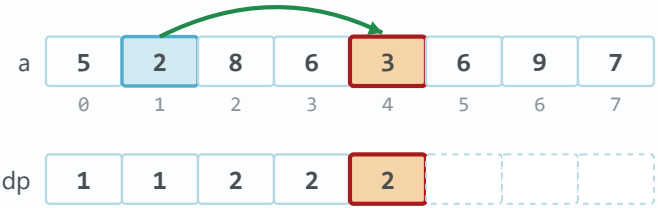
Adım 5 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `dp[i] = 2` `enUzun = 2`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 4, a[i] = 3: soldaki küçükler 2. En uzununu uzatan j = 1 (dp = 1) → dp[4] = **2**.

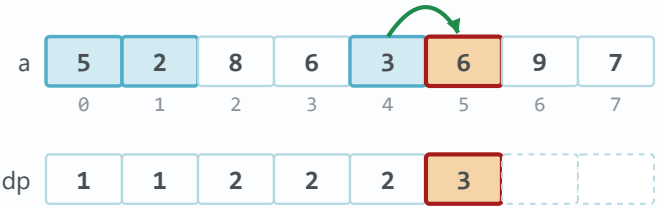
Adım 6 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `dp[i] = 2` `enUzun = 2`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 5, a[i] = 6: soldaki küçükler 5, 2, 3. En uzununu uzatan j = 4 (dp = 2) → dp[5] = **3**.

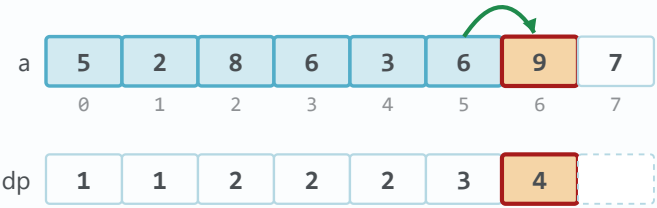
Adım 7 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 5` `dp[i] = 3` `enUzun = 3`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 6, a[i] = 9: soldaki küçükler 5, 2, 8, 6, 3, 6. En uzununu uzatan j = 5 (dp = 3) → dp[6] = **4**.

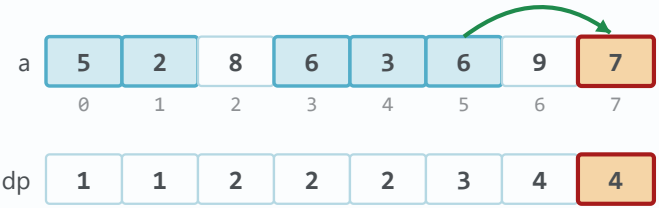
Adım 8 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 6` `dp[i] = 4` `enUzun = 4`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
▶      dp[i] = 1;          // tek başına
▶      for (int j = 0; j < i; j++)
▶        if (a[j] < a[i] &&
▶            dp[j] + 1 > dp[i])
▶          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
▶      enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
12   return enUzun;
13 }
```



i = 7, a[i] = 7: soldaki küçükler 5, 2, 6, 3, 6. En uzununu uzatan j = 5 (dp = 3) → dp[7] = **4**.

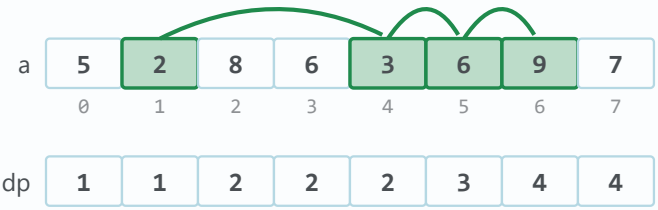
Adım 9 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 7` `dp[i] = 4` `enUzun = 4`

lis({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lis(int[] a) {
2    int n = a.length, enUzun = 0;
3    int[] dp = new int[n];
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
5      dp[i] = 1;          // tek başına
6      for (int j = 0; j < i; j++)
7        if (a[j] < a[i] &&
8            dp[j] + 1 > dp[i])
9          dp[i] = dp[j] + 1;  // uzat
10     enUzun = Math.max(enUzun, dp[i]);
11   }
▶    return enUzun;
13 }
```



enUzun = **4** = max dp[i] (dp[n − 1] değil). Örnek bir LIS: 2, 3, 6, 9 (dp değerleri 1, 2, 3, 4 olan zincir).

Adım 10 / 10

DEĞİŞKENLER

`i = 8` `dp[i] = –` `enUzun = 4`

EN UZUN ARTAN ALT DİZİ

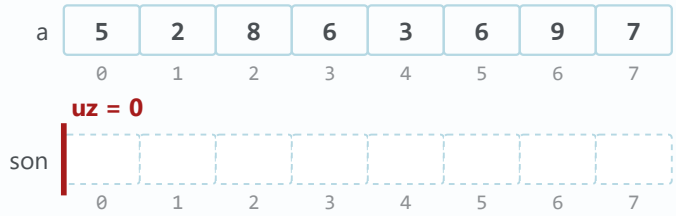
LIS: O(n log n) — Sonlar Dizisi ve İkili Arama

```
static int lisHizli(int[] a) {
  int[] son = new int[a.length];
  int uz = 0;                 // aktif liste sayısı
  for (int x : a) {
    int alt = 0, ust = uz;    // son[alt] >= x ilk yer
    while (alt < ust) {
      int orta = (alt + ust) / 2;
      if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
      else ust = orta;
    }
    son[alt] = x;             // yerine koy / uzat
    if (alt == uz) uz++;
  }
  return uz;
}
```

- Aktif listelerin yalnızca **sonları** saklanır; son[] her zaman artan sıradadır, yer **ikili aramayla** bulunur → O(n log n).
- Örnek dizide son = [0, 1, 3, 7, 11, 15]: uzunluk doğru (6) ama bu dizi bir LIS **değildir** (7, 11'den sonra gelir).
- Diziyi kurmak için her öğenin önceki indisi ayrıca tutulur.

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
5      int alt = 0, ust = uz;
6      while (alt < ust) {
7        int orta = (alt + ust) / 2;
8        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
9        else ust = orta;
10     }
11     son[alt] = x;      // koy / uzat
12     if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



son[k] = uzunluğu k + 1 olan artan alt dizilerin **en küçük** son öğesi. son[0..uz−1] her zaman artandır; başta uz = 0.

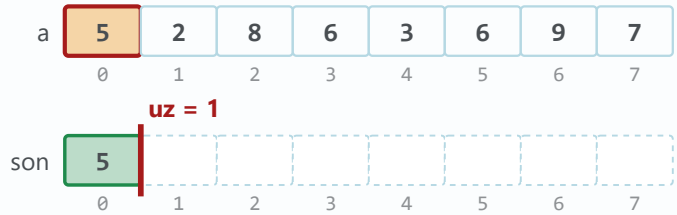
Adım 1 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = –` `alt = –` `uz = 0`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 5 tüm sonlardan büyük: ikili arama alt = uz = 0 verir → son[0] = 5, liste uzar (uz = 1).

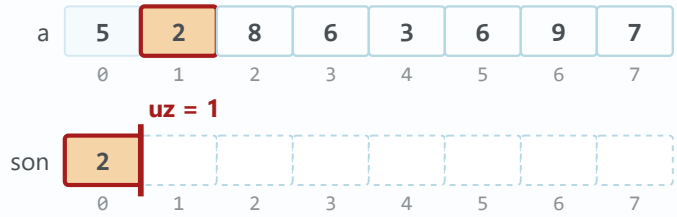
Adım 2 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 5` `alt = 0` `uz = 1`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 2: son[alt] ≥ x olan ilk yer alt = 0 (1 karşılaştırma) → 5 yerine 2 yazılır; uz değişmez, ama 1 uzunluklu dizi artık daha küçük bir sayıyla biter.

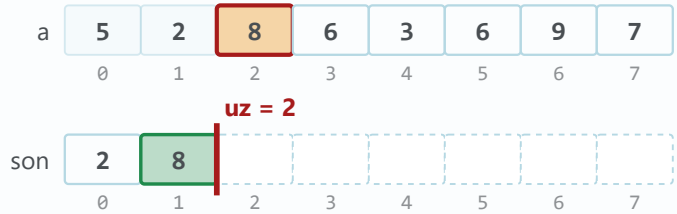
Adım 3 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 2` `alt = 0` `uz = 1`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 8 tüm sonlardan büyük: ikili arama alt = uz = 1 verir → son[1] = 8, liste uzar (uz = 2).

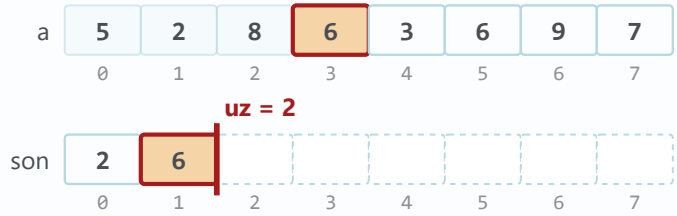
Adım 4 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 8` `alt = 1` `uz = 2`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 6: son[alt] ≥ x olan ilk yer alt = 1 (2 karşılaştırma) → 8 yerine 6 yazılır; uz değişmez, ama 2 uzunluklu dizi artık daha küçük bir sayıyla biter.

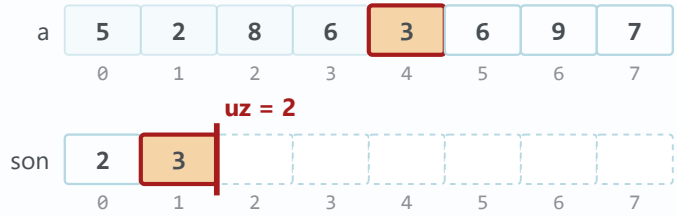
Adım 5 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 6` `alt = 1` `uz = 2`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 3: son[alt] ≥ x olan ilk yer alt = 1 (2 karşılaştırma) → 6 yerine 3 yazılır; uz değişmez, ama 2 uzunluklu dizi artık daha küçük bir sayıyla biter.

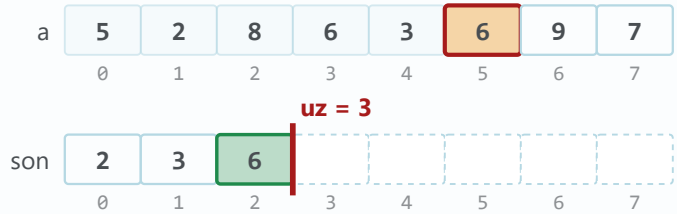
Adım 6 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 3` `alt = 1` `uz = 2`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 6 tüm sonlardan büyük: ikili arama alt = uz = 2 verir → son[2] = 6, liste uzar (uz = 3).

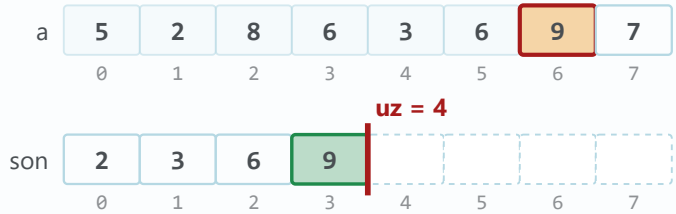
Adım 7 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 6` `alt = 2` `uz = 3`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 9 tüm sonlardan büyük: ikili arama alt = uz = 3 verir → son[3] = 9, liste uzar (uz = 4).

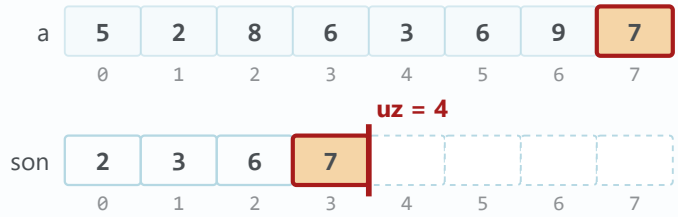
Adım 8 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 9` `alt = 3` `uz = 4`

lisHizli({5, 2, 8, 6, 3, 6, 9, 7})

```
1  static int lisHizli(int[] a) {
2    int[] son = new int[a.length];
3    int uz = 0;        // liste sayısı
4    for (int x : a) {
▶      int alt = 0, ust = uz;
▶      while (alt < ust) {
▶        int orta = (alt + ust) / 2;
▶        if (son[orta] < x) alt = orta + 1;
▶        else ust = orta;
10     }
▶      son[alt] = x;      // koy / uzat
▶      if (alt == uz) uz++;
13   }
14   return uz;
15 }
```



x = 7: son[alt] ≥ x olan ilk yer alt = 3 (2 karşılaştırma) → 9 yerine 7 yazılır; uz değişmez, ama 4 uzunluklu dizi artık daha küçük bir sayıyla biter. Sonuç **4**; son = [2, 3, 6, 7] bir LIS olmak zorunda değildir.

Adım 9 / 9

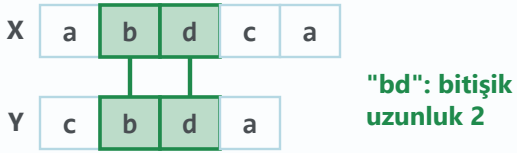
DEĞİŞKENLER

`x = 7` `alt = 3` `uz = 4`

En Uzun Ortak Alt Dizgi (Longest Common Substring)

- İki dizginin **bitişik** karakterlerden oluşan en uzun ortak parçası.
- Örnek: `"abdca"` ve `"cbda"` → ortak alt dizgiler "a", "b", "d", "c", **"bd"** → cevap **"bd"**, uzunluk 2.
- **Durum:** L[i][j] = Y'nin ilk i ve X'in ilk j karakterinin **tam sonunda biten** en uzun ortak parçanın uzunluğu.

Y[i−1] = X[j−1] ise L[i][j] = L[i−1][j−1] + 1
aksi hâlde L[i][j] = **0** (bitişiklik bozulur, sayaç sıfırlanır)
Cevap = tablodaki **en büyük** değer (son hücre değil!)



Kaba kuvvet: X'in $O(m^2)$ alt dizgisini Y içinde aramak → $O(m^2 \cdot n)$. DP: $O(m \cdot n)$ zaman.

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

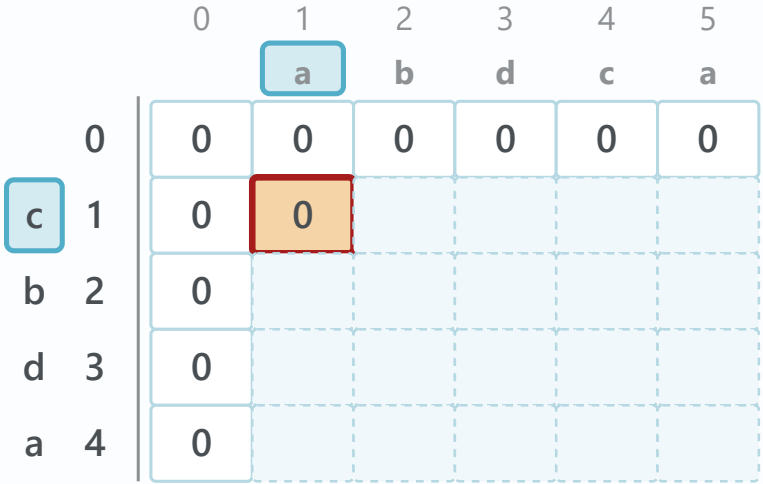
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0					
b	2	0					
d	3	0					
a	4	0					

Satır 0 ve sütun 0 sıfırdır: boş dizgiyle ortak parça yoktur.

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

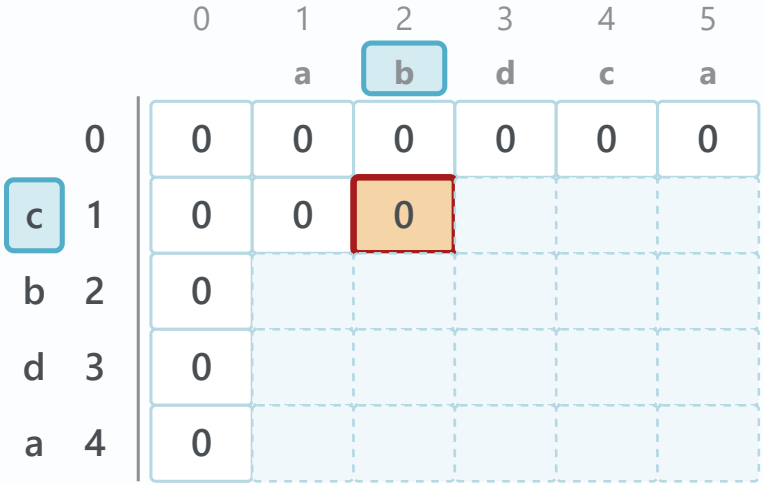
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'c' ≠ 'a' → L[1][1] = 0 · en iyi: 0

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

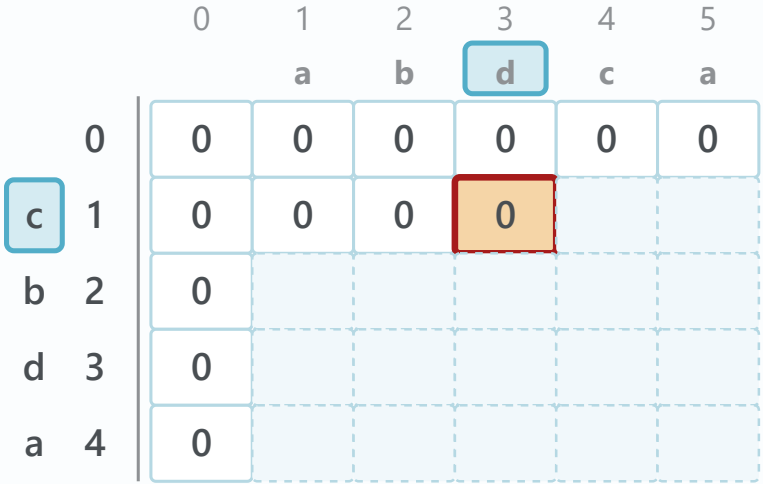
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'c' ≠ 'b' → L[1][2] = 0 · en iyi: 0

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'c' ≠ 'd' → L[1][3] = 0 · en iyi: 0

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

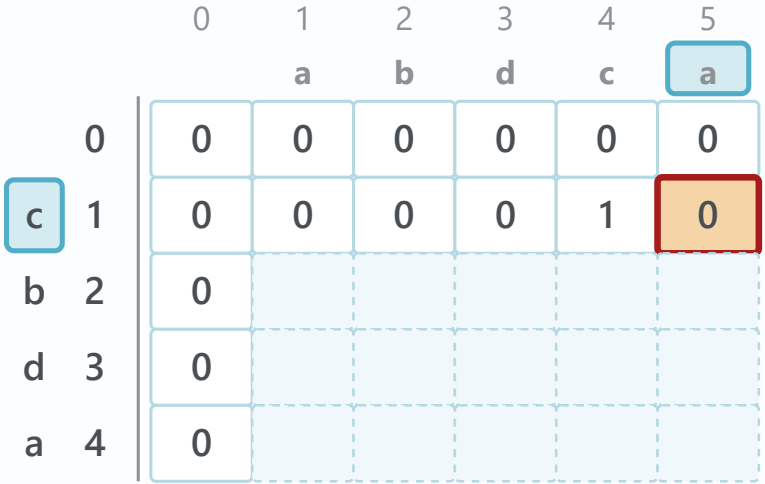
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	
b	2	0					
d	3	0					
a	4	0					

Y[0]='c' = X[3]='c' → L[1][4] = L[0][3] + 1 = **1** · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

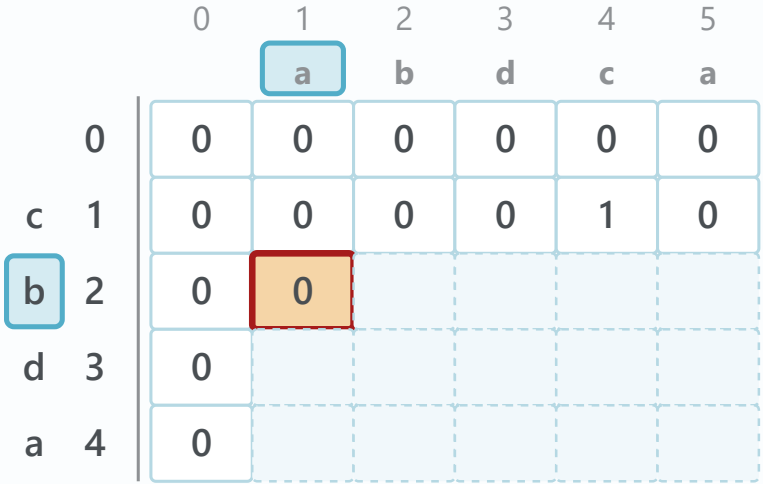
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'c' ≠ 'a' → L[1][5] = 0 · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

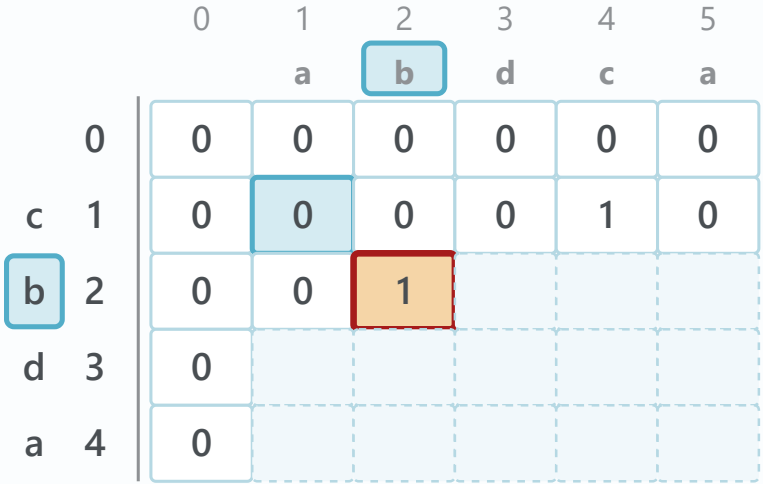
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'b' ≠ 'a' → L[2][1] = 0 · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

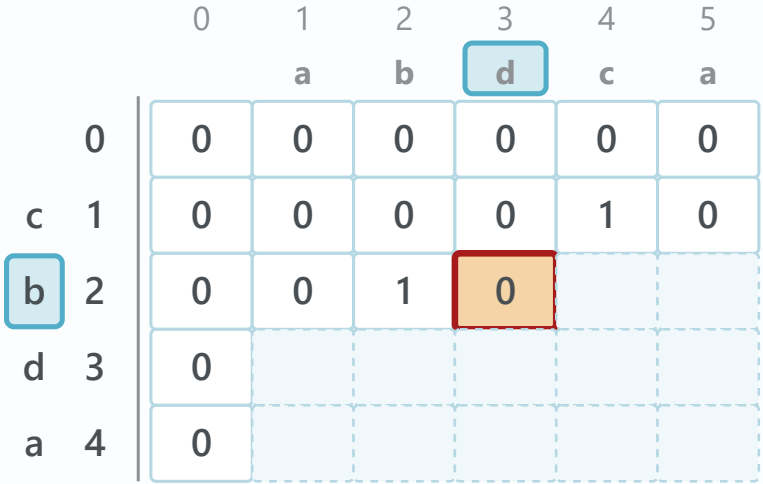
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



Y[1]='b' = X[1]='b' → L[2][2] = L[1][1] + 1 = **1** · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

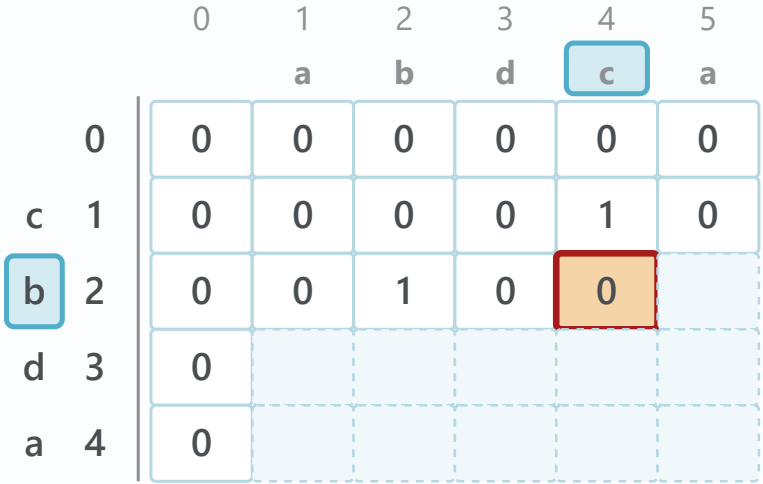
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'b' ≠ 'd' → L[2][3] = 0 · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'b' ≠ 'c' → L[2][4] = 0 · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

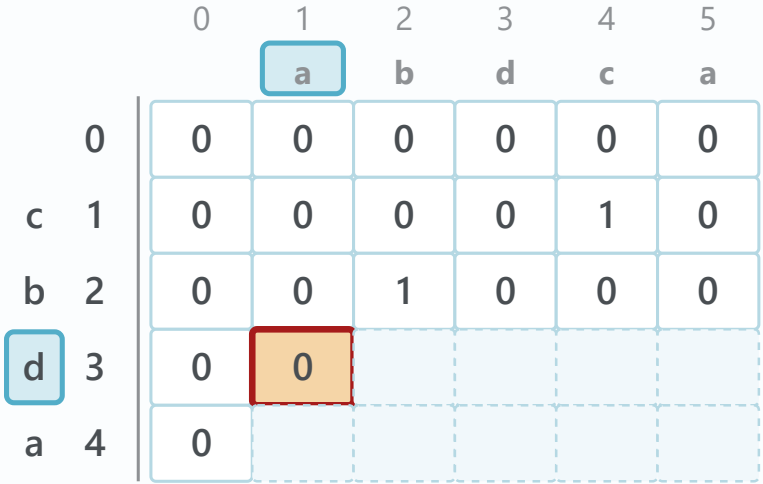
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0					
a	4	0					

'b' ≠ 'a' → L[2][5] = 0 · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'd' ≠ 'a' → L[3][1] = 0 · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

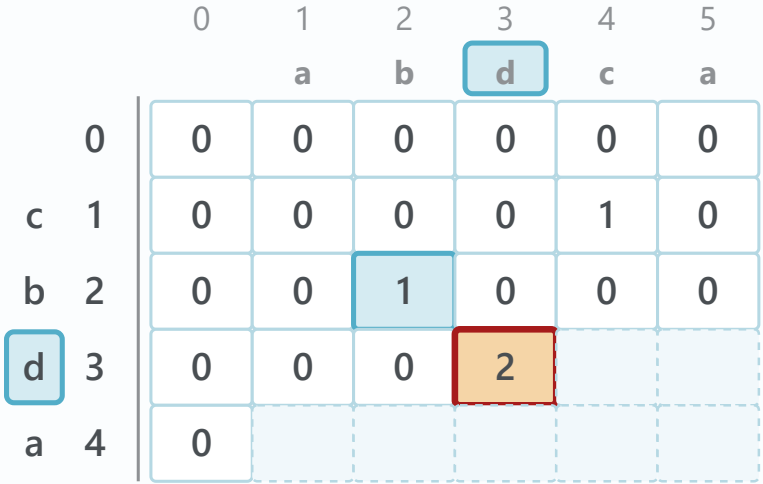
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0	0	0			
a	4	0					

'd' ≠ 'b' → L[3][2] = 0 · en iyi: 1

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



Y[2]='d' = X[2]='d' → L[3][3] = L[2][2] + 1 = **2** · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0	0	0	2	0	
a	4	0					

'd' ≠ 'c' → L[3][4] = 0 · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0	0	0	2	0	0
a	4	0					

'd' ≠ 'a' → L[3][5] = 0 · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

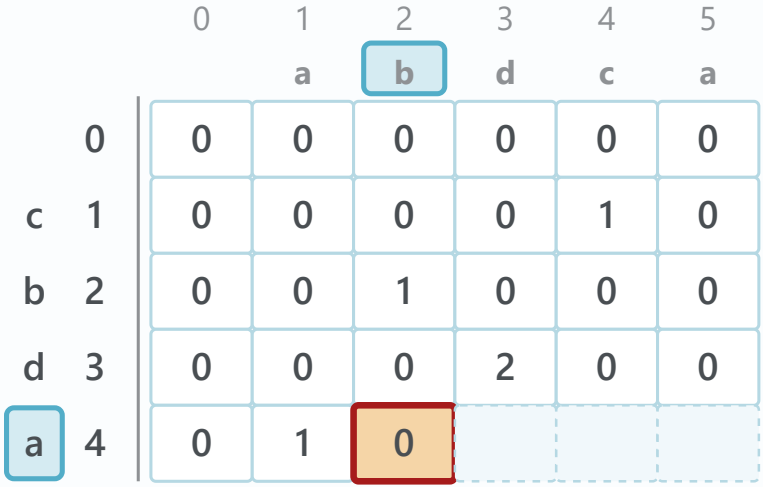
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0	0	0	2	0	0
a	4	0	1				

Y[3]='a' = X[0]='a' → L[4][1] = L[3][0] + 1 = **1** · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'a' ≠ 'b' → L[4][2] = 0 · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

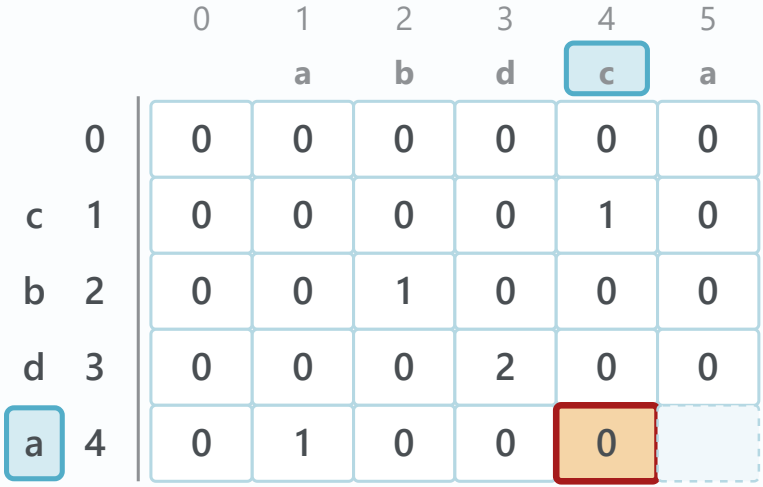
Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0	0	0	2	0	0
a	4	0	1	0	0		

'a' ≠ 'd' → L[4][3] = 0 · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.



'a' ≠ 'c' → L[4][4] = 0 · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0	0	0	2	0	0
a	4	0	1	0	0	0	1

Y[3]='a' = X[4]='a' → L[4][5] = L[3][4] + 1 = **1** · en iyi: 2

Ortak Alt Dizgi: Tablo Doldurma

Sütunlar X = "abdca", satırlar Y = "cbda". Turuncu: hesaplanan hücre · mavi: kullanılan çapraz hücre.

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	0
b	2	0	0	1	0	0	0
d	3	0	0	0	2	0	0
a	4	0	1	0	0	0	1

En büyük değer L[3][3] = **2**; çapraz geriye 2 adım: X[1..2] = **"bd"**. Son hücre L[4][5] = 1 cevap değildir.

EN UZUN ORTAK ALT DİZİ

En Uzun Ortak Alt Dizi (Longest Common Subsequence)

- İki dizinin, sırası korunarak (atlamalı) seçilebilen en uzun ortak alt dizisi.
- Örnek: `"abdca"` ve `"cbda"` → **"bda"**, uzunluk 3 (ortak alt dizgi yalnızca 2 idi). LCS tek olmak zorunda değildir, **uzunluğu** tektir: AGGTAB · GXTXAYB → GTAB (4); GTAB alt dizidir ama alt dizgi değildir.
- Kullanım: `diff` / git karşılaştırması, DNA dizilerinin benzerliği, intihal tespiti.

Y[i−1] = X[j−1] ise L[i][j] = L[i−1][j−1] + 1 (ortak karakteri al)
aksi hâlde L[i][j] = max(L[i−1][j] , L[i][j−1]) (birini atla)
Cevap = **L[n][m]** (son hücre)

	Eşleşme	Eşleşmeme	Cevap
Ortak alt dizgi	çapraz + 1	**0**	tablonun maksimumu
Ortak alt dizi (LCS)	çapraz + 1	**max(üst, sol)**	son hücre

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
9          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
10                            L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0					
b	2	0					
d	3	0					
a	4	0					

L dizisi (n+1) × (m+1) = 5 × 6; Java'da başlangıçta tüm hücreler 0.

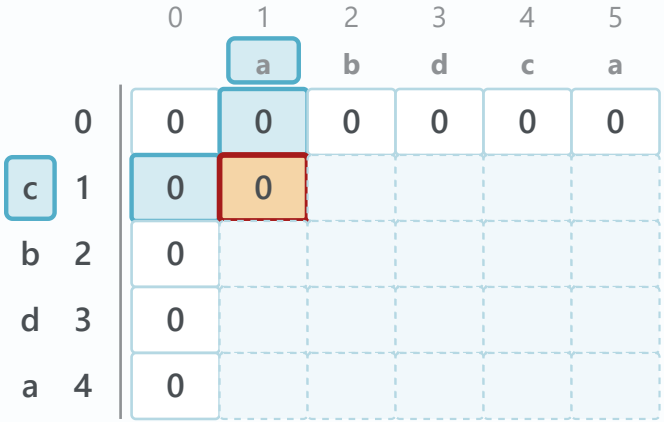
Adım 1 / 22

DEĞİŞKENLER

`x = "abdca"` `y = "cbda"` `i = –` `j = –`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```



'c' ≠ 'a' → max(üst 0, sol 0) = **0**

Adım 2 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `j = 1` `y[i-1] = 'c'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 0`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0			
b	2	0					
d	3	0					
a	4	0					

'c' ≠ 'b' → max(üst 0, sol 0) = **0**

Adım 3 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `j = 2` `y[i-1] = 'c'` `x[j-1] = 'b'` `L[i][j] = 0`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0		
b	2	0					
d	3	0					
a	4	0					

'c' ≠ 'd' → max(üst 0, sol 0) = **0**

Adım 4 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `j = 3` `y[i-1] = 'c'` `x[j-1] = 'd'` `L[i][j] = 0`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
▶        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
▶          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
9          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
10                            L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	
b	2	0					
d	3	0					
a	4	0					

'c' = 'c' → çapraz + 1: L[1][4] = 0 + 1 = **1**

Adım 5 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `j = 4` `y[i-1] = 'c'` `x[j-1] = 'c'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0					
d	3	0					
a	4	0					

'c' ≠ 'a' → max(üst 0, sol 1) = **1**

Adım 6 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `j = 5` `y[i-1] = 'c'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0				
d	3	0					
a	4	0					

'b' ≠ 'a' → max(üst 0, sol 0) = **0**

Adım 7 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `j = 1` `y[i-1] = 'b'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 0`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
▶        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
▶          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
9          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
10                            L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1			
d	3	0					
a	4	0					

'b' = 'b' → çapraz + 1: L[2][2] = 0 + 1 = **1**

Adım 8 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `j = 2` `y[i-1] = 'b'` `x[j-1] = 'b'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1		
d	3	0					
a	4	0					

'b' ≠ 'd' → max(üst 0, sol 1) = **1**

Adım 9 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `j = 3` `y[i-1] = 'b'` `x[j-1] = 'd'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	
d	3	0					
a	4	0					

'b' ≠ 'c' → max(üst 1, sol 1) = **1**

Adım 10 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `j = 4` `y[i-1] = 'b'` `x[j-1] = 'c'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0					
a	4	0					

'b' ≠ 'a' → max(üst 1, sol 1) = **1**

Adım 11 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `j = 5` `y[i-1] = 'b'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0				
a	4	0					

'd' ≠ 'a' → max(üst 0, sol 0) = **0**

Adım 12 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `j = 1` `y[i-1] = 'd'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 0`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1			
a	4	0					

'd' ≠ 'b' → max(üst 1, sol 0) = **1**

Adım 13 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `j = 2` `y[i-1] = 'd'` `x[j-1] = 'b'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
▶        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
▶          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
9          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
10                            L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2		
a	4	0					

'd' = 'd' → çapraz + 1: L[3][3] = 1 + 1 = **2**

Adım 14 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `j = 3` `y[i-1] = 'd'` `x[j-1] = 'd'` `L[i][j] = 2`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	
a	4	0					

'd' ≠ 'c' → max(üst 1, sol 2) = **2**

Adım 15 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `j = 4` `y[i-1] = 'd'` `x[j-1] = 'c'` `L[i][j] = 2`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0					

'd' ≠ 'a' → max(üst 1, sol 2) = **2**

Adım 16 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `j = 5` `y[i-1] = 'd'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 2`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
▶        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
▶          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
9          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
10                            L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1				

'a' = 'a' → çapraz + 1: L[4][1] = 0 + 1 = **1**

Adım 17 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `j = 1` `y[i-1] = 'a'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1			

'a' ≠ 'b' → max(üst 1, sol 1) = **1**

Adım 18 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `j = 2` `y[i-1] = 'a'` `x[j-1] = 'b'` `L[i][j] = 1`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2		

'a' ≠ 'd' → max(üst 2, sol 1) = **2**

Adım 19 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `j = 3` `y[i-1] = 'a'` `x[j-1] = 'd'` `L[i][j] = 2`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
▶          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
▶                             L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	

'a' ≠ 'c' → max(üst 2, sol 2) = **2**

Adım 20 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `j = 4` `y[i-1] = 'a'` `x[j-1] = 'c'` `L[i][j] = 2`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
▶        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
▶          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
9          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
10                            L[i][j - 1]);
11   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

'a' = 'a' → çapraz + 1: L[4][5] = 2 + 1 = **3**

Adım 21 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 4` `j = 5` `y[i-1] = 'a'` `x[j-1] = 'a'` `L[i][j] = 3`

LCS: Kod İzleme

```
1  static int lcs(String x, String y) {
2    int m = x.length(), n = y.length();
3    int[][] L = new int[n + 1][m + 1];
4    for (int i = 1; i <= n; i++)
5      for (int j = 1; j <= m; j++)
6        if (y.charAt(i - 1) == x.charAt(j - 1))
7          L[i][j] = L[i - 1][j - 1] + 1;
8        else
9          L[i][j] = Math.max(L[i - 1][j],
10                            L[i][j - 1]);
   ▶   return L[n][m];
12 }
```

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

Tablo doldu: `L[4][5]` = **3**. 20 hücre, her biri O(1) → O(m · n).

Adım 22 / 22

DEĞİŞKENLER

`i = 5` `j = –` `sonuc = 3`

EN UZUN ORTAK ALT DİZİ

LCS: Çözümü Geri Okuma

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

Geri okuma son hücreden, L[4][5] = 3'ten başlar; bulunan karakterler sondan başa toplanır.

LCS: Çözümü Geri Okuma

		0	1	2	3	4	5
			a	**b**	**d**	**c**	**a**
	0	0	0	0	0	0	0
c	**1**	0	0	0	0	1	1
b	**2**	0	0	1	1	1	1
d	**3**	0	0	1	2	2	2
a	**4**	0	1	1	2	2	**3**

'a' = 'a' → karakter LCS'ye eklenir ("a"), çapraz geçilir.

LCS: Çözümü Geri Okuma

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

'd' ≠ 'c'; sol (2) > üst (1) → sola gidilir.

EN UZUN ORTAK ALT DİZİ

LCS: Çözümü Geri Okuma

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

'd' = 'd' → karakter LCS'ye eklenir ("da"), çapraz geçilir.

LCS: Çözümü Geri Okuma

		0	1	2	3	4	5
			a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

'b' = 'b' → karakter LCS'ye eklenir ("bda"), çapraz geçilir.

LCS: Çözümü Geri Okuma

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

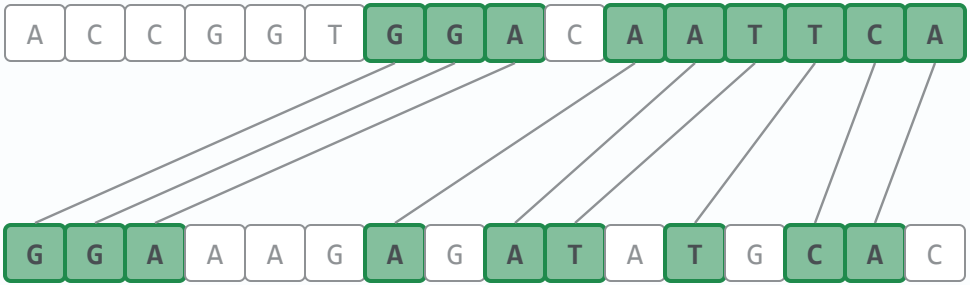
'c' ≠ 'a'; üst (0) ≥ sol (0) → yukarı çıkılır.

LCS: Çözümü Geri Okuma

		0	1 a	2 b	3 d	4 c	5 a
	0	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	0	1	1	1	1
d	3	0	0	1	2	2	2
a	4	0	1	1	2	2	3

Sınıra ulaşıldı. Yeşil hücreler eşleşmeler: LCS = **"bda"**, uzunluk 3. Geri okuma O(m + n).

Örnek: DNA Dizilerinde LCS



- Eşleşen karakterleri birleştiren çizgiler **kesişmez**: göreli sıra korunur. Bu kural sağlanan her eşleştirme bir ortak alt dizidir.
- DP sonucu: LCS = **GGAAATTCA**, uzunluk **9**.

Göz kararı eşleştirme yanıltıcıdır. Örneğin AAAATTCA (8 karakter) da geçerli bir ortak alt dizidir, ama **en uzun** değildir; doğru cevabı DP tablosu verir.

Deneyin: LCS ve Ortak Alt Dizgi Tablosu

X abdca Y cbda LCS ortak alt dizgi

		a	b	d	c	a
	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1	1
b	0	0	1	1	1	1
d	0	0	1	2	2	2
a	0	1	1	2	2	3

LCS uzunluğu **3**: "bda" (son hücre).

X en fazla 9, Y en fazla 7 karakter. Yeşil hücreler geri okuma yolunu gösterir.

Diğer Klasik DP Problemleri

Problem	Durum ve bağıntı	Süre
Düzenleme uzaklığı (edit distance)	$D[i][j] = \min(D[i-1][j] + 1, D[i][j-1] + 1, D[i-1][j-1] + [a_i \neq b_j])$; $D[i][0] = i$, $D[0][j] = j$	$O(m \cdot n)$
Para üstü (coin change)	en az para: $P[x] = 1 + \min P[x - c]$ $(c \leq x)$; $P[0] = 0$	$O(k \cdot X)$
En büyük toplamlı alt dizi	$V(i) = \max(a[i], V(i-1) + a[i])$ — Kadane; cevap $\max V(i)$	$O(n)$
Matris zinciri çarpımı	$M[i][j] = \min \{ M[i][k] + M[k+1][j] + p_{i-1} \cdot p_k \cdot p_j : i \leq k < j \}$	$O(n^3)$
Gezgin satıcı (Held-Karp)	$dp[S][i]$ = S kümesini gezip i'de biten en kısa yol; $dp[S][i] = \min dp[S - i][j] + d(j, i)$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Bellman-Ford	$d_k(v)$ = en fazla k kenarlı en kısa yol; $d_k(v) = \min(d_{k-1}(v), d_{k-1}(u) + w(u, v))$	$O(V \cdot E)$
Optimal ikili arama ağacı	$e[i][j] = \min \{ e[i][r-1] + e[r+1][j] : i \leq r \leq j \} + w(i, j)$	$O(n^3)$

ÖZET

Özet

Problem	Durum / bağıntı	Zaman · bellek
Fibonacci	$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$; bellekleme ya da tablo	$O(n) \cdot O(1)$
0/1 sırt çantası	$K[i][c] = \max(K[i-1][c], v_i + K[i-1][c-w_i])$	$O(nW) \cdot O(W)$
Sınırsız sırt çantası	$dp[i][c] = \max(dp[i-1][c], p_i + dp[\mathbf{i}][c-w_i])$	$O(nW) \cdot O(W)$
Alt küme toplamı	$dp[i][j] = dp[i-1][j] \vee dp[i-1][j-a_i]$	$O(n \cdot \text{hedef})$
LIS	$dp[i] = 1 + \max dp[j]$ ($j < i$, $a[j] < a[i]$); ya da aktif listeler	$O(n^2)$ / $O(n \log n)$
Ortak alt dizgi	eşitse çapraz + 1, değilse 0; cevap tablonun maksimumu	$O(mn)$
LCS	eşitse çapraz + 1, değilse max(üst, sol); cevap son hücre	$O(mn)$

DP = **örtüşen alt problemler** + **optimal alt yapı**. Süre ≈ durum sayısı × durum başına iş. Çözümün kendisi tablodan **geri okunarak** bulunur.

ÖZET

Sık Yapılan Hatalar

Taban durumlarını unutmak

K[0][c], dp[i][0] ya da fib(0)/fib(1) yanlış başlatılırsa bütün tablo kayar.

İndis kayması

Tablo (n+1) boyutlu ama dizi n: i. satır `v[i − 1]`'i kullanır. `v[i]` yazmak son eşyada taşma verir.

Yanlış döngü yönü

Tek boyutlu 0/1 sırt çantasında kapasiteyi küçükten büyüğe gezmek eşyayı birden çok kez alır (sınırsız olur).

Alt dizgi ≠ alt dizi

Ortak alt dizgide eşleşmeme 0 yazar ve cevap tablonun maksimumudur; LCS'de max(üst, sol) yazılır ve cevap son hücredir.

Açgözlü sanmak

0/1 sırt çantasında ve para üstünde ({1, 3, 4} ile 6) açgözlü seçim optimal değildir.

O(nW)'yi polinom sanmak

W sayısal değerdir; girdi boyutu log W bittir. Büyük W'de tablo kurulamaz.

ÖZET

Örnek Problemler

1. 0/1 sırt çantası: W = 5; eşyalar (v, w) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5). En büyük değer?
2. LCS("ABCBDAB", "BDCABA") uzunluğu kaçtır? Bir LCS yazın.
3. Paralar {1, 3, 4}, tutar 6: en az kaç para? Açgözlü kaç para kullanır?
4. [10, 22, 9, 33, 21, 50, 41, 60] dizisinin LIS uzunluğu ve bir LIS?
5. "ABAB" ve "BABA" için en uzun ortak alt dizgi (bitişik) ve LCS uzunlukları?
6. Düz özyinelemeli fib(6) kaç çağrı yapar? Bellekleme ile kaç?

▶ **Cevapları göster**

ÖZET

Alıştırmalar

1. 0/1 sırt çantasını **bellekleme** (yukarıdan aşağı) ile yazın.
2. Paralar {1, 2, 5} ile 5 tutarı **kaç farklı şekilde** ödenebilir?
3. "ababc" ve "babca" için en uzun ortak alt dizgiyi bulun.
4. {3, 34, 4, 12, 5, 2} kümesinde toplamı 9 ve 30 olan alt küme var mı?
5. [−2, 1, −3, 4, −1, 2, 1, −5, 4] için en büyük toplamlı alt dizi (Kadane)?
6. Ağırlık {2, 3, …, 8}, değer {3, 5, 8, 6, 10, 11, 15}, W = 10: 0/1 ve sınırsız sonuçlar?

▶ **Cevaplar / ipuçları**

Kaynaklar

- Cormen, Leiserson, Rivest ve Stein, *Introduction to Algorithms*, 4. baskı, MIT Press, 2022 (Bölüm 14: Dynamic Programming).
- Kleinberg ve Tardos, *Algorithm Design*, Pearson, 2005 (Bölüm 6).
- Dasgupta, Papadimitriou ve Vazirani, *Algorithms*, McGraw-Hill, 2006 (Bölüm 6).
- R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.

Son

Bölüm 8: Dinamik Programlama

Sonraki bölüm: Bölüm 9: Geri İzleme Algoritmaları · Terim sözlüğü