Doğrusal Cebir

Yapay Zekâ ve Veri Dersleri Rehberi · Kısım V: Matematik Temeli

Vektör ve matris | Denklem sistemleri | Özdeğer | SVD ve PCA | YZ'de nerede | Komşu dersler

Sercan KÜLCÜ · Giresun Üniversitesi · Bilgisayar Mühendisliği

© Sercan Külcü. Tüm hakları saklıdır. · Sunumun etkileşimli HTML sürümü: https://sercankulcu.github.io/files/ai_courses/sunumlar/Bolum_31_Dogrusal_Cebir.html

GİRİŞ

Ders Hangi Soruyu Sorar?

> **Vektörler ve matrisler veriyi ve dönüşümleri nasıl temsil eder?**

Doğrusal cebir vektörleri, matrisleri ve **doğrusal dönüşümleri** inceler. Yapay zekâ ve veri derslerinde neredeyse her şey bir vektördür: bir görüntü, bir sözcük, bir kullanıcı. Bir sinir ağı katmanı da büyük ölçüde bir matris çarpımıdır.

Bir bakışta

YAKLAŞIM vektör uzayları ve dönüşümler	**GİRDİ** vektör, matris	**ÇIKTI** çözüm, ayrıştırma, dönüşüm
BAŞARI ÖLÇÜTÜ doğruluk, sayısal kararlılık	**MATEMATİK YÜKÜ** kuramın kendisi	**VERİ İHTİYACI** gerekmez

Kısa Tarihçe

1844
Grassmann, çok boyutlu vektör uzayı düşüncesini ilk kez sistemli biçimde ortaya koyar.

1858
Cayley matrisleri kendi başına cebirsel nesneler olarak ele alır; matris çarpımı tanımlanır.

1901
Pearson, verideki en iyi uyan doğru ve düzlemleri bulur: temel bileşenler analizi (PCA).

1936
Eckart ve Young, SVD ile bir matrisin en iyi düşük ranklı yaklaşımını gösterir.

1965
Golub ve Kahan, SVD'yi bilgisayarda kararlı biçimde hesaplayan yöntemi verir.

1979
BLAS yayımlanır: bugünkü bilimsel ve YZ kütüphanelerinin altındaki temel matris işlemleri.

DERS

Temel Kavramlar

Vektör ve uzay
Veriyi çok boyutlu bir noktaya çevirmek.

Matris çarpımı
Bir dönüşümü ya da bir ağ katmanını uygulamak.

İç çarpım ve norm
Benzerlik (kosinüs) ve uzaklık ölçmek.

Rank ve taban
Verinin gerçekte kaç bağımsız yöne yayıldığı.

Doğrusal sistemler
Ax = b; en küçük kareler çözümü.

Özdeğer, özvektör
Dönüşümün yönünü değiştirmediği vektörler.

SVD
Her matrisi döndürme, ölçekleme, döndürmeye ayırmak.

İzdüşüm
Bir vektörün bir alt uzaydaki en yakın karşılığı.

Tipik İş Akışı



Örnek: Yüz tanımada her yüz görüntüsü uzun bir piksel vektörüdür. Yüzler bir matrise dizilir, ortalama çıkarılır, SVD ile en önemli birkaç yön (özyüzler) bulunur ve her yüz bu az sayıdaki yönün ağırlıklarıyla temsil edilip karşılaştırılır.

DERS

Derste Neler İşlenir?

1. Vektörler, doğrusal birleşim ve iç çarpım
2. Doğrusal sistemler ve Gauss yok etmesi
3. Matris işlemleri, ters matris ve LU ayrışımı
4. Vektör uzayları ve dört temel alt uzay
5. Doğrusal bağımsızlık, taban, boyut ve rank
6. Diklik, izdüşüm ve en küçük kareler
7. Gram-Schmidt yöntemi ve QR ayrışımı
8. Determinant ve özellikleri
9. Özdeğer, özvektör ve köşegenleştirme
10. Simetrik ve pozitif tanımlı matrisler
11. Tekil değer ayrışımı (SVD) ve PCA
12. Doğrusal dönüşümler ve taban değişimi

Kazandırdığı beceriler

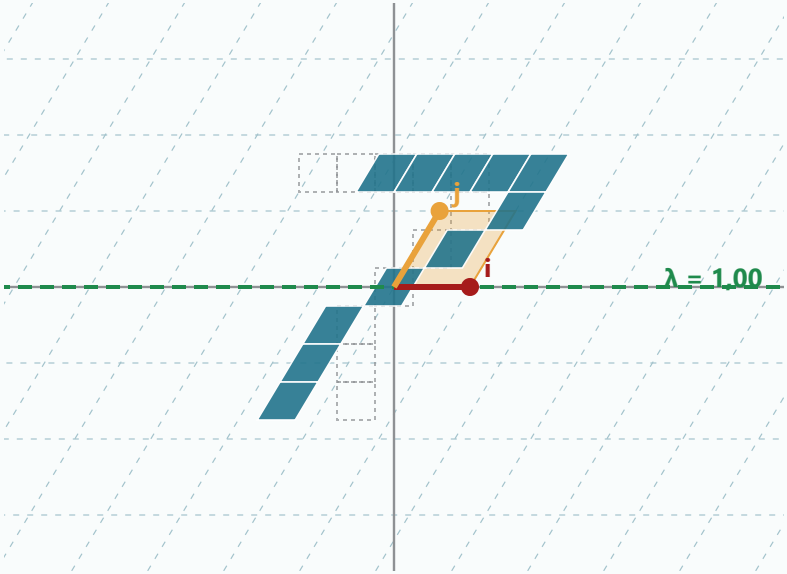
NumPy ile matris hesapları | scipy.linalg ile sistem çözmek | SVD ile boyut indirgemek | en küçük kareler uydurmak | kısa ispat yazmak

Tipik bir dönemin akışıdır; sıra ve kapsam üniversiteden üniversiteye değişir.

DENE

Rakam Görüntüsünü Çoğaltmak

El yazısı rakam tanıyan bir model için az örnek var; her görüntüyü döndürüp eğerek yenilerini üretmek (veri artırma) her pikseli bir 2×2 matrisle çarpmaktır. Matrisi değiştirip “7”ye ne olduğunu izleyin.



a = **1,00**

b = **0,60**

c = **0,00**

d = **1,00**

Döndür 30° | Ayna | **Eğ** | Gerdir | Ez | Birim

Dönüşüm: **eğme (kayma)**
det = **1,00**: alan ×1,00
Özdeğerler: **1,00** ve **1,00** (yeşil kesikli doğrular yönünü korur)

Determinant alanın kaç katına çıktığını, özvektörler dönüşümün bozmadığı yönleri söyler. Aynı özvektör fikri PCA’da verinin en çok yayıldığı yönleri bulur.

KONUM

Ön Koşullar

Bu dersten önce bilinmesi yararlı olan dersler ve neden gerektikleri.

Ders	Neden gerekir
Lise matematiği	denklem çözme, fonksiyon ve koordinat düzlemi
Programlama	diziler ve döngüler: matris işlemlerini kodla denemek

KONUM

Bu Ders Sana Göre mi?

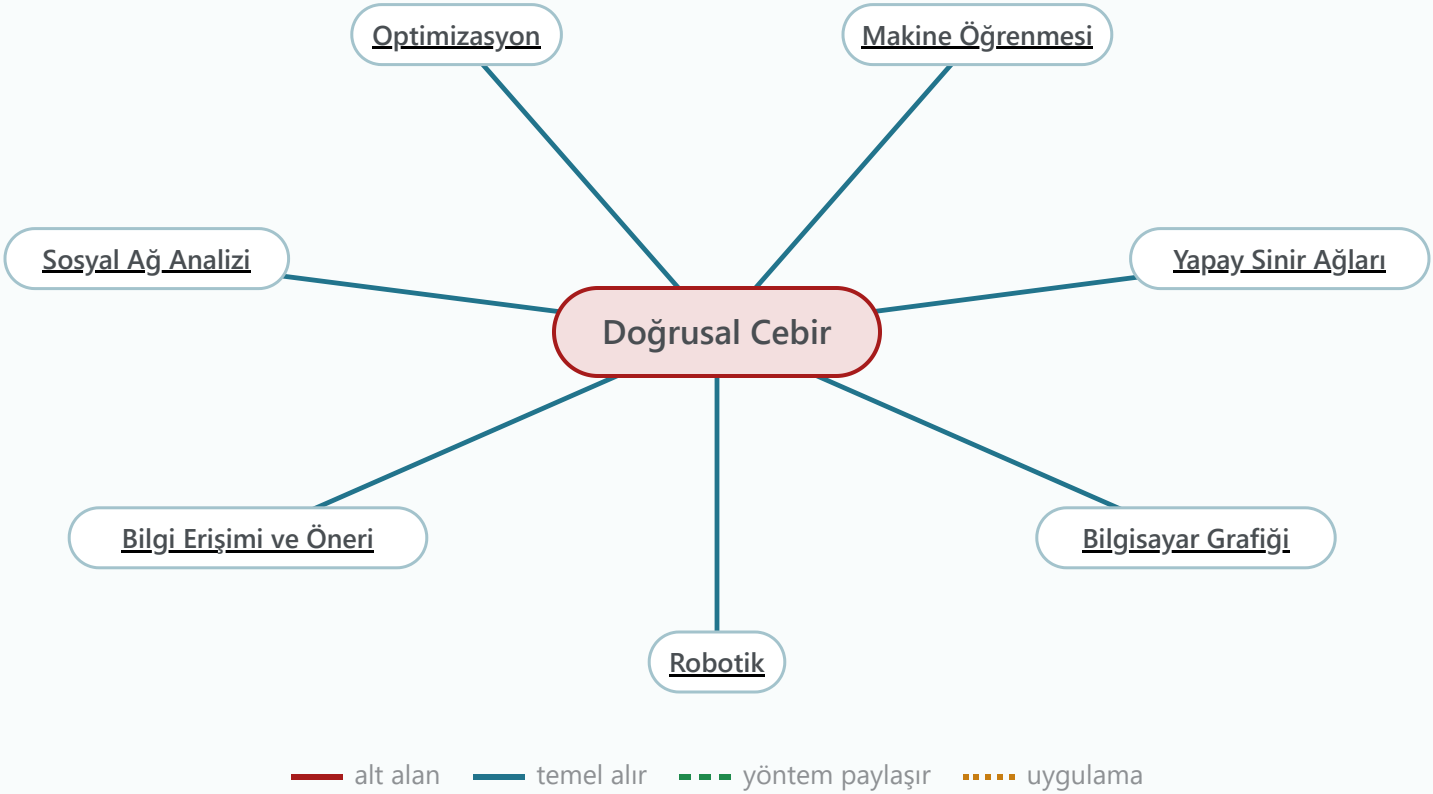
Kendine sor; "hayır" dediklerin için sağdaki sütun nereden başlayacağını gösterir.

Kendine sor	Hayırsa önce
İki bilinmeyenli bir denklem sistemini yok etme yöntemiyle çözebiliyor musun?	Lise matematiğindeki denklem sistemleri
Düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı bulabiliyor musun?	Lise matematiğindeki analitik geometri
Sinüs ve kosinüsle bir dik üçgenin açısını hesaplayabiliyor musun?	Lise trigonometrisi
Python'da iki listenin elemanlarını döngüyle çarpıp toplayabiliyor musun?	Programlamaya giriş, ardından NumPy'a kısa bir giriş

Çoğuna "evet" diyebiliyorsan derse hazırsın; bir ya da iki "hayır" dönem içinde kapanabilir.

KONUM

Dersin Komşuları



ÖRTÜŞME

Örtüştüğü Dersler

İlişki	Ders	Ortak konu
temel alır	Makine Öğrenmesi bu dersi temel alır	öznitelik vektörleri, matris çarpımı, PCA
temel alır	Yapay Sinir Ağları bu dersi temel alır	ağırlık matrisleri, vektörleştirilmiş hesap
temel alır	Bilgisayar Grafiği bu dersi temel alır	dönüşüm matrisleri, izdüşüm
temel alır	Robotik ve Robot Görüsü bu dersi temel alır	koordinat dönüşümleri, kinematik
temel alır	Bilgi Erişimi ve Öneri Sistemleri bu dersi temel alır	vektör uzayı modeli, matris ayrıştırma
temel alır	Sosyal Ağ Analizi bu dersi temel alır	komşuluk matrisi, spektral yöntemler
temel alır	Optimizasyon bu dersi temel alır	gradyan, Hessian, konvekslik

AYRIŞMA

Ayrıştığı Noktalar (1/2)

Ölçüt	Doğrusal Cebir	Optimizasyon	Olasılık ve İstatistik
Temel soru	Vektörler ve matrisler veriyi ve dönüşümleri nasıl temsil eder?	Bir amaç fonksiyonunu en iyi yapan değerler nasıl bulunur?	Belirsizlik nasıl ölçülür ve sınırlı veriden nasıl güvenilir sonuç çıkarılır?
Yaklaşım	vektör uzayları ve dönüşümler	amaç ve kısıtların matematiksel modeli	olasılık modeli ve çıkarım
Girdi	vektör, matris	amaç fonksiyonu ve kısıtlar	örneklem verisi
Çıktı	çözüm, ayrıştırma, dönüşüm	en iyi ya da ona yakın çözüm	kestirim, güven aralığı, test sonucu
Başarı ölçütü	doğruluk, sayısal kararlılık	amaç değeri, yakınsama hızı	yansızlık, güç, anlamlılık
Matematik yükü	kuramın kendisi	kuramın kendisi	kuramın kendisi
Veri ihtiyacı	gerekmez	gerekmez	örneklem

- **Optimizasyon:** Optimizasyon en iyi değerleri arar; doğrusal cebir bu aramada kullanılan gradyan, Hessian ve sistem çözümünü sağlar.
- **Olasılık ve İstatistik:** Olasılık belirsizliği ölçer; doğrusal cebir veriyi ve kovaryans matrisini temsil edip ayrıştırır.

AYRIŞMA

Ayrıştığı Noktalar (2/2)

Ölçüt	Doğrusal Cebir	Makine Öğrenmesi	Bilgisayar Grafiği
Temel soru	Vektörler ve matrisler veriyi ve dönüşümleri nasıl temsil eder?	Bir program örneklerden nasıl genelleme yapar?	Bir sahnenin tanımından gerçekçi bir görüntü nasıl üretilir?
Yaklaşım	vektör uzayları ve dönüşümler	istatistiksel öğrenme	geometri ve ışık benzetimi
Girdi	vektör, matris	etiketli ya da etiketsiz örnekler	sahne: model, ışık, kamera
Çıktı	çözüm, ayrıştırma, dönüşüm	tahmin yapan model	görüntü ya da animasyon
Başarı ölçütü	doğruluk, sayısal kararlılık	görülmemiş veride hata	gerçekçilik, kare hızı
Matematik yükü	kuramın kendisi	yüksek: doğrusal cebir, olasılık, optimizasyon	yüksek: doğrusal cebir, geometri
Veri ihtiyacı	gerekmez	orta ve çok	gerekmez

- **Makine Öğrenmesi:** MÖ veriden model öğrenir; doğrusal cebir o modelin içinde dönen hesabın dilidir, kendisi öğrenmez.
- **Bilgisayar Grafiği:** Bilgisayar grafiği 3B dönüşüm matrislerini uygular; bu ders bu matrislerin genel kuramını verir.

UYGULAMA

Uygulama Alanları

Sinir ağları
Katman = matris çarpımı ve etkinleştirme.

PCA
Boyut indirgeme ve görselleştirme.

Öneri sistemleri
Kullanıcı-ürün matrisini ayrıştırma.

Sözcük gömmeleri
Anlam benzerliği = vektör yakınlığı.

PageRank
Bağlantı matrisinin baskın özvektörü.

Görüntü işleme
Dönüşümler, sıkıştırma ve süzgeçler.

UYGULAMA

Riskler ve Etik

Kötü koşulluluk

Koşul sayısı büyük bir matriste girdideki küçük bir hata çözümü kat kat büyütür; sonuç anlamsız basamaklarla dolar.

Normal denklemler tuzağı

En küçük karelerde A^TA kurmak koşul sayısının karesini alır; QR ya da SVD ile çözmek daha güvenlidir.

Sessiz boyut hataları

NumPy'ın yayınlama (broadcasting) kuralı uyumsuz boyutları hata vermeden işler; sonuç yanlış ama sorunsuz görünür.

PCA'yı yanlış okumak

Ölçeklenmemiş öznitelikte PCA büyük birimli değişkeni öne çıkarır; bir bileşen her zaman anlamlı bir etken değildir.

Ayrıntılı tartışma: Açıklanabilir Yapay Zekâ ve Yapay Zekâ Etiği.

UYGULAMA

Araçlar ve Örnek Veriler

Araçlar ve kütüphaneler

NumPy | SciPy (scipy.linalg) | PyTorch | MATLAB | GNU Octave | LAPACK ve BLAS

Klasik örnek problemler

En küçük kareler ile doğru uydurma | Özyüzler (eigenfaces) | PageRank özvektörü

SVD ile görüntü sıkıştırma | Netflix Prize matris ayrıştırma | Markov zinciri kararlı durumu

Matris işlemleri elle değil, yılların emeği olan **LAPACK ve BLAS** üzerinden yapılır; NumPy ve PyTorch da bunları çağırır.

UYGULAMA

Sık Karıştırılanlar

Yaygın düşünce	Doğrusu
Doğrusal cebir yalnızca denklem çözmektir.	Asıl güç dönüşümleri ve ayrıştırmaları anlamaktadır: PCA, SVD ve gömmeler bunun üstüne kurulur.
Ters matrisi hesaplayıp çarpmak doğru yoldur.	Pratikte ters alınmaz; LU, QR ya da Cholesky ile sistem çözülür, daha hızlı ve kararlıdır.
Yüksek boyutlu uzay 3B gibi davranır.	Yüksek boyutta noktalar birbirine benzer uzaklıkta durur; sezgi yanıltır (boyut laneti).
Kütüphaneler varken kuramı bilmek gereksiz.	Rank kaybı, kötü koşulluluk ve boyut hataları ancak kuram bilinirse anlaşılır.

SONRASI

Bu Dersten Sonra

Bu dersi temel alan ya da genişleten dersler

Makine Öğrenmesi | Yapay Sinir Ağları | Bilgisayar Grafiği | Robotik ve Robot Görüsü | Bilgi Erişimi ve Öneri Sistemleri | Sosyal Ağ Analizi | Optimizasyon

İlgili meslekler

Makine öğrenmesi mühendisi | Veri bilimci | Bilgisayar grafiği geliştiricisi | Sayısal hesaplama uzmanı

Doğrusal cebir rehberdeki hemen her dersin önkoşuludur. Bu dersten sonra optimizasyona, makine öğrenmesine, sinir ağlarına ve bilgisayar grafiğine rahatça geçilebilir. Sayısal doğrusal cebir ve GPU programlama, aynı hesapları büyük ölçekte hızlı yapmayı öğretir.

SONRASI

Kaynaklar

- Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 6. baskı, Wellesley-Cambridge Press, 2023.
- Strang, *Linear Algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, 2019.
- Trefethen ve Bau, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997.
- Deisenroth, Faisal ve Ong, *Mathematics for Machine Learning*, Cambridge University Press, 2020.

Son

Bölüm 31: Doğrusal Cebir

← Önceki bölüm · Alanın haritası · Sonraki bölüm →