Bölüm 0: Hazırlık

Oyun Kuramı İçin Gerekli Matematik

Küme, fonksiyon, sayma | Σ, seri, argmax, türev | Üs, e ve ln | Zincir kuralı, kısmi türev

Olasılık, Bayes, beklenen değer | Karışık strateji, softmax | Kazanç matrisi | En iyi tepki

İkinci derece denklem | Kayıtsızlık denklemi | Oyun ağacı | Büyüme hızı: O ve Θ

Sercan KÜLCÜ · Giresun Üniversitesi · Bilgisayar Mühendisliği

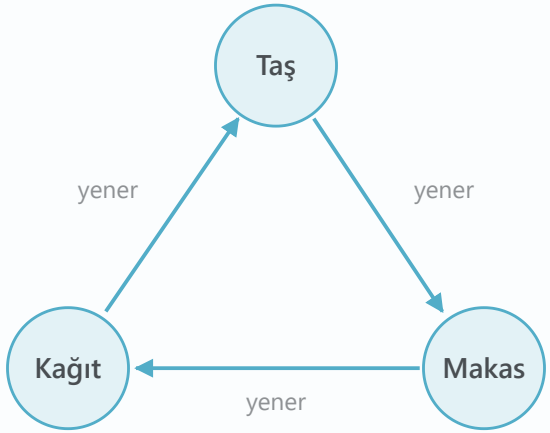
© Sercan Külcü. Tüm hakları saklıdır. · Sunumun etkileşimli HTML sürümü: https://sercankulcu.github.io/files/agt/slides/Bolum_00_Hazirlik.html

GİRİŞ

Oyunla Başlangıç: Taş-Kağıt-Makas

İki oyuncu aynı anda **Taş**, **Kağıt** ya da **Makas** seçer: Taş Makas'ı, Makas Kağıt'ı, Kağıt Taş'ı yener; aynı seçim berabere biter. Kazanan 1 puan alır, kaybeden 1 puan verir.

Taş-Kağıt-Makas oyunu bilgisayara karşı oynanır; rakip rastgele oynayabilir ya da hamlelerinizin *sıklığını* veya *örüntüsünü* öğrenebilir.



Merak soruları

Sizce öğrenen bir bilgisayarın sizi uzun vadede yenemeyeceği bir oynayış var mı?

Hep Taş oynayan biri, rakibi bunu fark edince tur başına ortalama kaç puan kaybeder?

GİRİŞ

Öğrenme Çıktıları

Gösterim

Küme, Kartezyen çarpım ve $u_1(s_1, s_2)$ gibi fonksiyon gösterimini okumak.

Σ, max, argmax

Toplamı ve geometrik seriyi hesaplamak; en büyük değeri ve onu veren seçeneği, sürekli seçimde türevle (zincir kuralı, kısmi türev) bulmak.

Olasılık

Sayarak, çarparak ve koşullu olasılıkla (Bayes) olasılık bulmak; U[0, 1] ile çalışmak.

Beklenen değer

Bir piyangonun ve karışık stratejinin beklenen kazancını hesaplamak; üs, ln ve softmax ifadelerini okumak.

Matris ve en iyi tepki

(a, b) çiftini doğru okumak, en iyi tepkileri matriste işaretlemek.

Denklem ve ağaç

İkinci derece denklemi ve kayıtsızlık denklemini çözmek; oyun ağacını yapraktan köke çözmek; O ve Θ ile büyüme hızını okumak.

Küme ve Kartezyen Çarpım

Küme, seçeneklerin listesidir; iki kümenin **Kartezyen çarpımı** ise "birinciden bir, ikinciden bir" seçilerek kurulabilecek tüm *sıralı* çiftlerdir.



Örnek

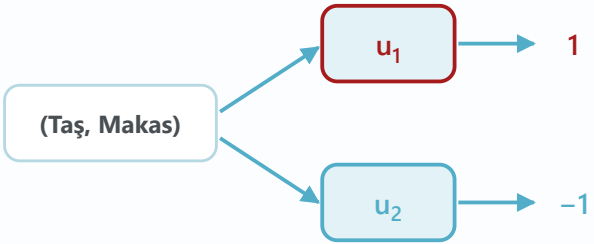
Ayşe'nin strateji kümesi S_1 = {Taş, Kağıt, Makas}; Taş ∈ S_1 ("Taş, S_1'in elemanı"), eleman sayısı $|S_1| = 3$.

Bora'nınki de S_2 = {Taş, Kağıt, Makas}. Oyunun tüm olası sonuçları $S_1 \times S_2$ kümesidir: $|S_1 \times S_2| = 3 \cdot 3 =$ **9** çift. Her çifte **strateji profili** denir.

Sık hata: (Taş, Kağıt) ile (Kağıt, Taş) aynı sanılır. Çiftte sıra önemlidir: ilk eleman Ayşe'nin, ikinci eleman Bora'nın seçimidir. Biri Ayşe'nin, diğeri Bora'nın kazandığı iki ayrı sonuçtur (şekilde turuncu hücreler).

Fonksiyon Gösterimi

Fonksiyon bir makinedir: girdiyi alır, *tek bir* çıktı verir. Kazanç fonksiyonu u_i, bir strateji profilini alıp i. oyuncunun kazancını (bir sayı) verir.



girdi: profil → çıktı: tek bir sayı

Örnek (Taş-Kağıt-Makas)

u_1(Taş, Makas) = 1: Ayşe Taş, Bora Makas oynarsa Ayşe 1 puan alır.

u_2(Taş, Makas) = −1: *aynı* profilde Bora 1 puan verir.

u_1(Kağıt, Kağıt) = 0: berabere.

Yazım: $u_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ ("profilden gerçek sayıya").

Sık hata: u_1(Taş, Kağıt) değerini "Kağıt kazanır" diye okumak. Fonksiyonun değeri bir sayıdır: u_1(Taş, Kağıt) = −1. Alt indis kimin kazancına baktığımızı söyler; u_1 ile u_2 aynı profilde farklı sayılar verir.

Sayma: Çarpım Kuralı, n! ve C(n, k)

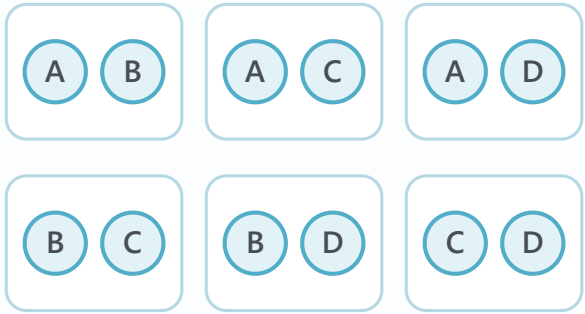
Art arda seçimlerde seçenek sayıları **çarpılır**. n farklı nesne n! = n · (n − 1) · … · 1 biçimde sıralanır. n nesneden sırası önemsiz k tanesini seçmenin yolu **C(n, k) = n! / (k! (n − k)!)**.

Örnek

Üç oyuncunun 2, 3 ve 4 stratejisi var: 2 · 3 · 4 = **24** strateji profili.

Üç kişi bir sıraya 3! = 3 · 2 · 1 = **6** biçimde dizilir.

Bekçi 4 hedeften 2'sini korur: C(4, 2) = 4!/(2! · 2!) = **6** saf strateji. 20 hedeften 5'i: C(20, 5) = **15.504**.



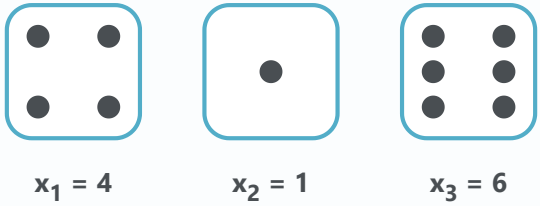
C(4, 2) = 6 seçim; sıra yok: {A, B} = {B, A}

Sık hata: Seçimde sırayı saymak. 4 hedeften "önce biri, sonra öteki" 4 · 3 = 12 sıralı çift verir; ama {A, B} ile {B, A} aynı korumadır, bu yüzden 12 / 2! = 6.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

Toplam Sembolü Σ

Σ "hepsini topla" demektir. Altındaki sayı nereden başlayacağını, üstündeki nerede duracağını söyler: $\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$.



$x_1 = 4$ $x_2 = 1$ $x_3 = 6$

Örnek: üç zar atışı

$\sum_{i=1}^{3} x_i = 4 + 1 + 6 = \mathbf{11}$

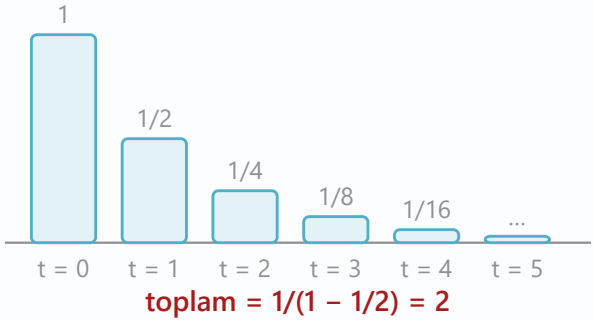
Adil zarda her yüzün olasılığı 1/6: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 6 \cdot 1/6 =$ **1**. Olasılıkların toplamı her zaman 1'dir.

Beklenen değer de bir toplamdır: $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

Sık hata: Kareyi toplamın dışına taşımak. $(\Sigma\, x_i)^2$ ile $\Sigma\, x_i^2$ farklıdır: $(4 + 1 + 6)^2 = 121$, ama $4^2 + 1^2 + 6^2 = 53$. Önce Σ'nın içindeki ifadeyi her i için hesapla, sonra topla.

Geometrik Seri ve İskonto Faktörü δ

Bir oyun her tur tekrarlanıyor; t tur sonraki kazanç δ^t ile çarpılır ($0 \le \delta < 1$): bugünkü 1 kazanç 1, bir tur sonraki δ, iki tur sonraki δ^2 değerindedir. Her tur 1 kazanılırsa toplam: $1 + \delta + \delta^2 + \ldots = \mathbf{1/(1 - \delta)}$.



Neden?

$S = 1 + \delta + \delta^2 + \ldots$ ise $\delta S = \delta + \delta^2 + \ldots$; çıkarınca $S - \delta S = 1 \Rightarrow S = 1/(1 - \delta)$.

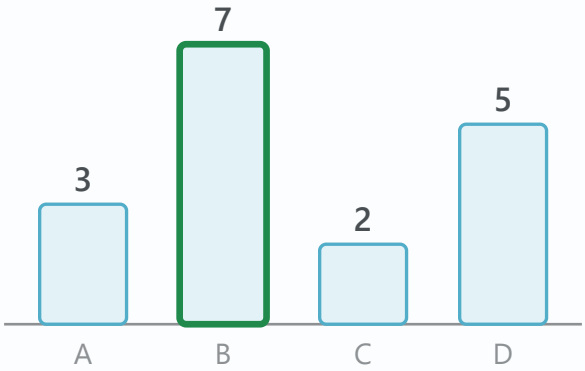
Örnek: $\delta = 0{,}9$ ve her tur 3 kazanç: $3/(1 - 0{,}9) =$ **30**. $\delta = 1/2$ ve her tur 1: $1 + 1/2 + 1/4 + \ldots =$ **2**.

Sık hata: İlk terimi unutmak: "bugünden sonra" başlayan toplam $\delta + \delta^2 + \ldots = \delta/(1 - \delta)$'dır, $1/(1 - \delta)$ değil. $\delta = 1$ için formül geçersizdir; toplam sınırsız büyür.

TOPLAM VE EN BÜYÜK

max ve argmax

max "en büyük değer kaç?" sorusunu, **argmax** "en büyük değeri *hangi seçenek* veriyor?" sorusunu cevaplar. Oyun kuramında oyuncu bir değer değil, bir eylem seçer; bu yüzden argmax daha sık kullanılır.



Örnek: kart seçimi

Dört kapalı karttan birini seçiyorsun; kartların ödülleri A: 3, B: 7, C: 2, D: 5 jeton.

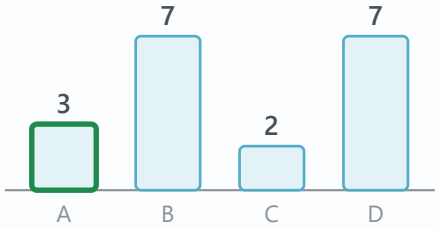
max{3, 7, 2, 5} = **7** (bir sayı)

argmax = **B** (bir seçenek): "B'yi seç".

Sık hata: argmax yerine değeri yazmak ("argmax = 7") ya da tersi. İkinci tuzak eşitliktir: ödüller 3, 7, 2, 7 olsaydı argmax tek bir eleman değil, {B, D} kümesi olurdu; ikisi de en iyi seçimdir.

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
eylem  = ["A", "B", "C", "D"]
kazanc = [3, 7, 2, 7]
en_iyi = 0              # en iyinin indisi
for i in range(1, 4):
    if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
        en_iyi = i
print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



Başlangıç: ilk kartı (A, 3 jeton) en iyi kabul et.

Adım 1 / 6

DEĞİŞKENLER

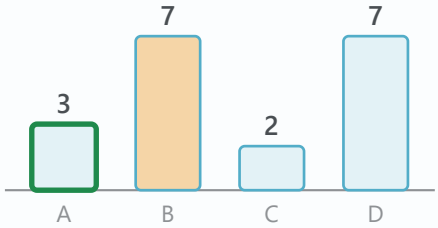
`i = –` `en_iyi = 0` `kazanc[en_iyi] = 3`

ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem  = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0              # en iyinin indisi
▶ for i in range(1, 4):
▶     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



i = 1: kazanc[1] = 7 > 3 mü? **Evet**.

Adım 2 / 6

DEĞİŞKENLER

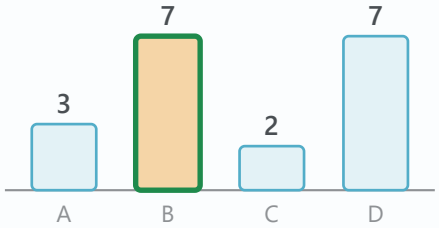
`i = 1` `en_iyi = 0` `kazanc[en_iyi] = 3`

ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem  = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0              # en iyinin indisi
4 for i in range(1, 4):
5     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
          en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



en_iyi = 1: yeni en iyi B (7 jeton).

Adım 3 / 6

DEĞİŞKENLER

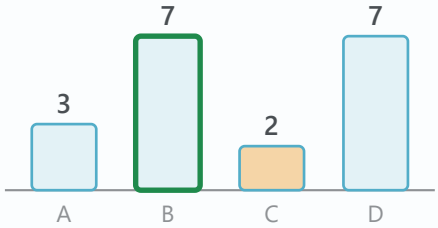
`i = 1` `en_iyi = 1` `kazanc[en_iyi] = 7`

ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem  = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0              # en iyinin indisi
for i in range(1, 4):
    if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



i = 2: kazanc[2] = 2 > 7 mü? Hayır, en iyi değişmez.

Adım 4 / 6

DEĞİŞKENLER

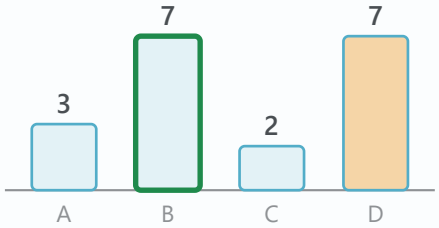
`i = 2` `en_iyi = 1` `kazanc[en_iyi] = 7`

ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem  = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0              # en iyinin indisi
▶ for i in range(1, 4):
▶     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
7 print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



i = 3: 7 > 7 mü? **Hayır**: eşitlikte kesin ">" ilk bulunanı tutar.

Adım 5 / 6

DEĞİŞKENLER

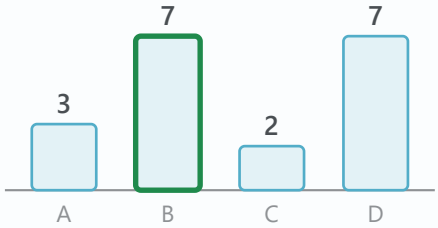
`i = 3` `en_iyi = 1` `kazanc[en_iyi] = 7`

ÇIKTI

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

İzleme: Döngüyle argmax Bulma

```
1 eylem  = ["A", "B", "C", "D"]
2 kazanc = [3, 7, 2, 7]
3 en_iyi = 0              # en iyinin indisi
4 for i in range(1, 4):
5     if kazanc[i] > kazanc[en_iyi]:
6         en_iyi = i
▶ print(kazanc[en_iyi], eylem[en_iyi])
```



max = **7**, kod argmax olarak **B** verir; D de 7 verdiği için argmax kümesi aslında {B, D}.

Adım 6 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 3` `en_iyi = 1` `kazanc[en_iyi] = 7`

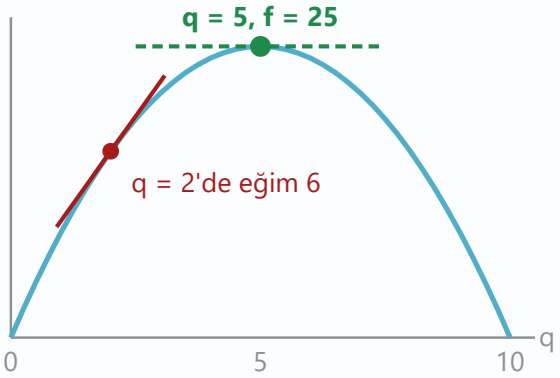
ÇIKTI

```
7 B
```

Turuncu çubuk: şu an bakılan kart. Yeşil çerçeve: şimdiye kadarki en iyi kart.

Fonksiyonun En Büyüğü: Türev = 0

Seçim sürekli olunca (üretim miktarı q gibi) argmax tablodan okunmaz. Kazanç eğrisinin **tepesinde eğim sıfırdır**: tepenin solunda eğim artı, sağında eksidir. Eğime **türev** denir: f′(q).



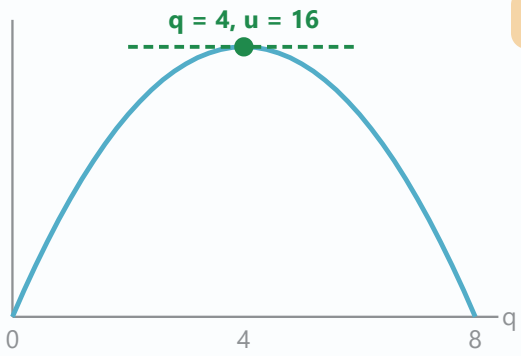
Yeterli kurallar

$(q^k)' = k \cdot q^{k-1}$ · sabitin türevi $0 \cdot (c \cdot f)' = c \cdot f'$ · toplamın türevi türevlerin toplamıdır.

Örnek: $f(q) = q(10 - q) = 10q - q^2$. $f'(q) = 10 - 2q = 0 \Rightarrow$ **q = 5**, f(5) = **25**. İkinci türev f″ (türevin türevi) eğimin nasıl değiştiğini söyler: $f'' = -2 < 0$, eğim azalıyor, yani nokta bir tepedir.

Sık hata: $f' = 0$ noktasını hiç denetlememek. Bu nokta bir çukur da olabilir; $f'' < 0$ ya da komşu değerler ($f(4) = f(6) = 24 < 25$) tepe olduğunu gösterir. Seçim bir aralıkla sınırlıysa uç noktalara da bakılır.

İzleme: Türevle En İyi Miktar

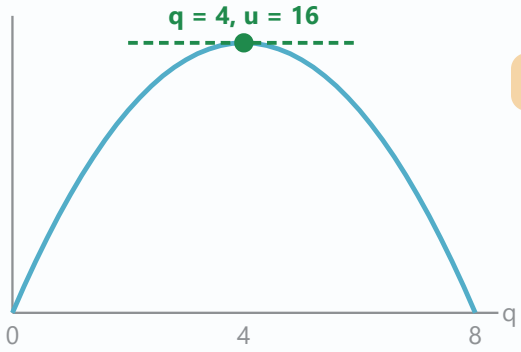


Fiyat = 12 − (q + r); q: firmanın, r: rakibin miktarı; maliyet yok. Grafik r = 4 içindir.

Kâr = miktar × fiyat: u(q) = q · (12 − q − r).

Adım 1 / 6

İzleme: Türevle En İyi Miktar



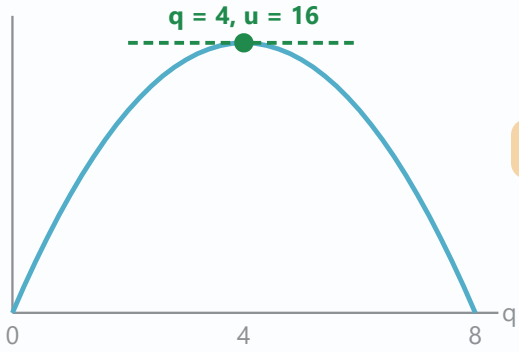
Fiyat = 12 − (q + r); q: firmanın, r: rakibin miktarı; maliyet yok. Grafik r = 4 içindir.

Kâr = miktar × fiyat: u(q) = q · (12 − q − r).

Rakip r = 4 üretirse: u(q) = q(8 − q) = **$8q - q^2$**.

Adım 2 / 6

İzleme: Türevle En İyi Miktar



Fiyat = 12 − (q + r); q: firmanın, r: rakibin miktarı; maliyet yok. Grafik r = 4 içindir.

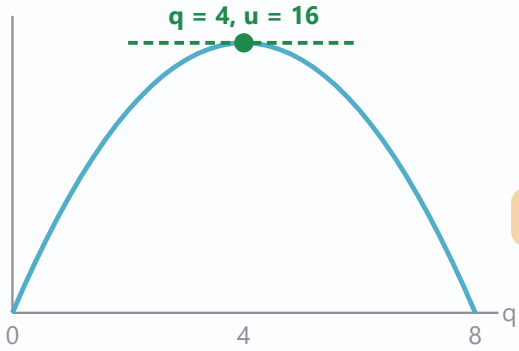
Kâr = miktar × fiyat: u(q) = q · (12 − q − r).

Rakip r = 4 üretirse: u(q) = q(8 − q) = **$8q - q^2$**.

Türev: u′(q) = 8 − 2q.

Adım 3 / 6

İzleme: Türevle En İyi Miktar



Fiyat = 12 − (q + r); q: firmanın, r: rakibin miktarı; maliyet yok. Grafik r = 4 içindir.

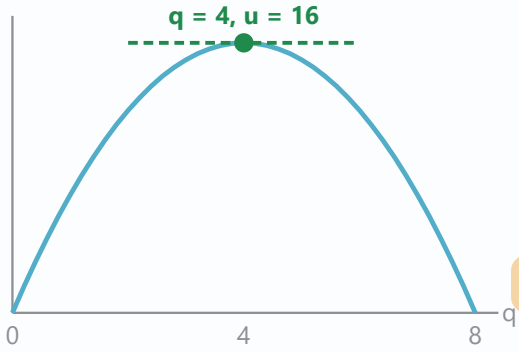
Kâr = miktar × fiyat: u(q) = q · (12 − q − r).

Rakip r = 4 üretirse: u(q) = q(8 − q) = **$8q - q^2$**.

Türev: u′(q) = 8 − 2q.

Sıfıra eşitle: 8 − 2q = 0 ⇒ **q = 4**; kâr u(4) = 4 · 4 = **16**.

İzleme: Türevle En İyi Miktar



Fiyat = 12 − (q + r); q: firmanın, r: rakibin miktarı; maliyet yok. Grafik r = 4 içindir.

Kâr = miktar × fiyat: u(q) = q · (12 − q − r).

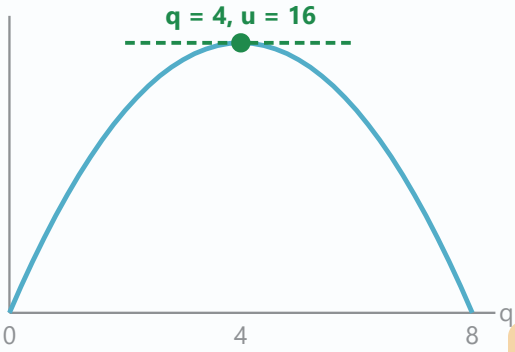
Rakip r = 4 üretirse: u(q) = q(8 − q) = **$8q - q^2$**.

Türev: u′(q) = 8 − 2q.

Sıfıra eşitle: 8 − 2q = 0 ⇒ **q = 4**; kâr u(4) = 4 · 4 = **16**.

Kontrol: u″ = −2 < 0; komşular u(3) = u(5) = 15 < 16 ✓

İzleme: Türevle En İyi Miktar



Fiyat = 12 − (q + r); q: firmanın, r: rakibin miktarı; maliyet yok. Grafik r = 4 içindir.

Kâr = miktar × fiyat: u(q) = q · (12 − q − r).

Rakip r = 4 üretirse: u(q) = q(8 − q) = **$8q - q^2$**.

Türev: u′(q) = 8 − 2q.

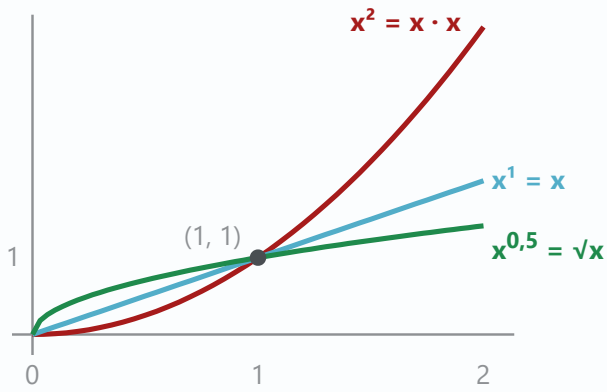
Sıfıra eşitle: 8 − 2q = 0 ⇒ **q = 4**; kâr u(4) = 4 · 4 = **16**.

Kontrol: u″ = −2 < 0; komşular u(3) = u(5) = 15 < 16 ✓

Genel r: u′(q) = 12 − 2q − r = 0 ⇒ **q = (12 − r)/2**. Miktar negatif olamaz: r ≥ 12 ise en iyisi hiç üretmemektir, yani tam formül **q*(r) = max{0, (12 − r)/2}**. Rakibin her miktarına en iyi cevabı veren bu formül, en iyi tepkinin sürekli hâlidir.

Üs Kuralları ve Kesirli Üs

x^a, a tam sayıysa x'in a kez kendisiyle çarpımıdır. Kurallar: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$, $\mathbf{x^0 = 1}$, $x^{-a} = 1/x^a$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Kesirli üs ($x^{0,88}$ gibi) de aynı kurallara uyar.



Örnek

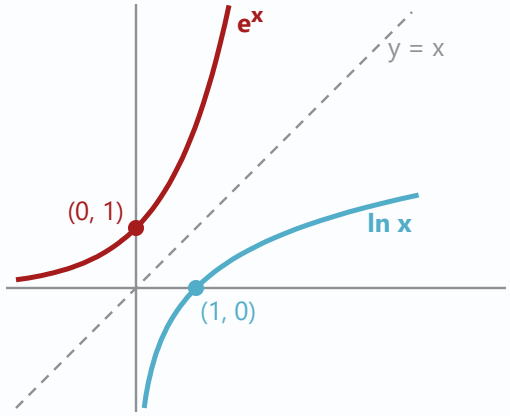
$\delta^2 \cdot \delta^3 = \delta^5$; $2^{-1} = 1/2$; $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$; $5^0 = 1$.

Fayda $x^{0,88}$: $100^{0,88} \approx 57,5$ ve $200^{0,88} \approx 105,9$. Para iki katına çıkınca fayda $2^{0,88} \approx 1,84$ katına çıkar: üs 1'den küçükse büyüme yavaşlar.

Sık hata: Üsleri toplamda da toplamak: $2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$, ama $2^5 = 32$. Üsler yalnız aynı tabanlı *çarpımda* toplanır. Bir de $x^0 = 0$ sanmak: $x^0 = 1$'dir ($x \neq 0$).

e Sayısı ve Doğal Logaritma ln

$e \approx 2{,}718$ özel bir tabandır; e^x her x için pozitiftir. **ln** (doğal logaritma) e^x'in ters işlemidir: $\ln(e^x) = x$ ve $y > 0$ için $e^{\ln y} = y$. Kurallar: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^k) = k \cdot \ln a$, $\ln 1 = 0$. Türevler: $(e^x)' = e^x$, **$(\ln x)' = 1/x$**.



Örnek

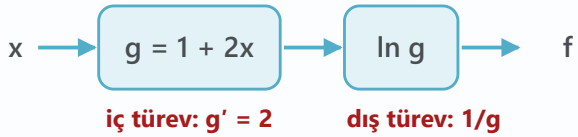
$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \cdot \ln 2 \approx 3 \cdot 0{,}693 =$ **2,079**; geri dönüş: $e^{2{,}079} \approx 8$.

Fayda $u(x) = \ln x$: servet 10'dan 20'ye çıkınca fayda $\ln 20 - \ln 10 = \ln 2 \approx 0{,}69$ artar; 20'den 40'a çıkınca da yine 0,69. $u'(x) = 1/x$: zenginleştikçe ek liranın faydası azalır.

Sık hata: $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$ sanmak: $\ln(2 + 6) = \ln 8 \approx 2{,}08$, ama $\ln 2 + \ln 6 = \ln 12 \approx 2{,}48$. Çarpımın logaritması toplanır, toplamınki değil. ln 0 ve negatif sayıların ln'i tanımsızdır.

Çarpımın Türevi ve Zincir Kuralı

Çarpım: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. **Zincir** (iç içe fonksiyon): $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; önce dıştakinin türevi alınır (içteki olduğu gibi kalır), sonra içtekinin türeviyle çarpılır.



türev = dıştakinin türevi × içtekinin türevi

$f' = 1/(1 + 2x) \cdot 2$

Örnek

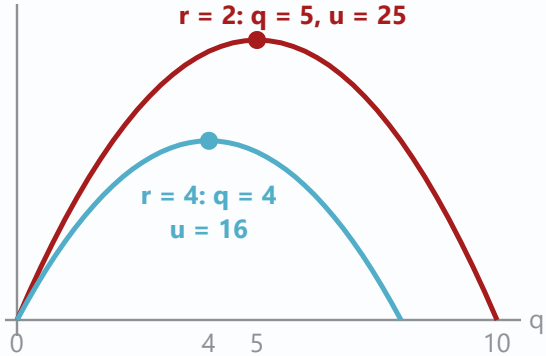
Kâr $u(q) = q \cdot (12 - q - r)$: $f = q$, $g = 12 - q - r$. $u' = 1 \cdot (12 - q - r) + q \cdot (-1) =$ **$12 - 2q - r$**; çarpımı açıp türev almak da aynı sonucu verir.

Zincir: $[\ln(1 + 2x)]' = 2/(1 + 2x)$; $(e^{-x})' = -e^{-x}$; $[(1 - p)^2]' = 2(1 - p) \cdot (-1) = -2(1 - p)$.

Sık hata: İçtekinin türevini unutmak: $(e^{-x})' = e^{-x}$ yazmak (doğrusu $-e^{-x}$). Çarpımda da $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ yanlıştır: $(q \cdot q)' = 2q$, ama $f' \cdot g' = 1 \cdot 1 = 1$.

Kısmi Türev: Diğer Değişkenler Sabit

Fonksiyon birden çok değişkene bağlıysa (u(q, r) gibi), **∂u/∂q** (partial derivative), r sabit bir sayı gibi tutularak yalnız q'ya göre alınan türevdir. Oyunda her oyuncu yalnız kendi değişkenini seçer; bu yüzden kendi değişkenine göre kısmi türevi sıfıra eşitler.



her r için bir eğri; ∂u/∂q o eğrinin eğimi

Örnek

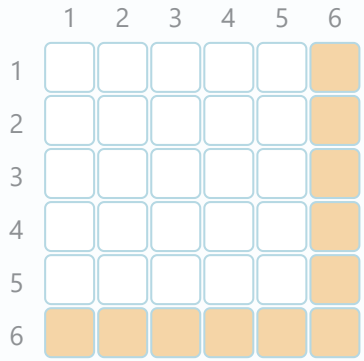
$u_1(q, r) = q(12 - q - r) = 12q - q^2 - qr$: $\partial u_1/\partial q =$ **$12 - 2q - r$**, $\partial u_1/\partial r = -q$.

Rakibin kârı $u_2 = r(12 - q - r)$: $\partial u_2/\partial r = 12 - q - 2r$. İkisi birlikte sıfır: $12 - 2q - r = 0$ ve $12 - q - 2r = 0 \Rightarrow$ **$q = r = 4$**.

Sık hata: Sabit tutulan değişkeni sıfır almak ya da onu da türevlemek: $\partial(q \cdot r)/\partial q = r$'dir; 0 ya da 1 + r değildir. r sabittir ama sıfır değildir.

Olasılık: Sayarak Hesaplamak

Sonuçlar eşit olasıysa P(olay) = istenen sonuç sayısı / tüm sonuç sayısı. Bağımsız olaylar (birbirini etkilemeyen atışlar) için olasılıklar **çarpılır**.



Örnekler

Zarda çift gelme: {2, 4, 6} → 3/6 = **1/2**.

İki yazı-turada iki yazı: 1/2 · 1/2 = **1/4**.

İki zarda en az bir 6: tümleyenle hesapla. Hiç 6 gelmemesi (5/6)·(5/6) = 25/36, o hâlde 1 − 25/36 = **11/36**. Tabloda 11 turuncu hücre.

Sık hata: "İki zarda en az bir 6" için 1/6 + 1/6 = 12/36 demek. Bu toplam (6, 6) sonucunu iki kez sayar; doğru cevap 11/36. Olasılıklar ancak olaylar aynı anda olamıyorsa toplanır.

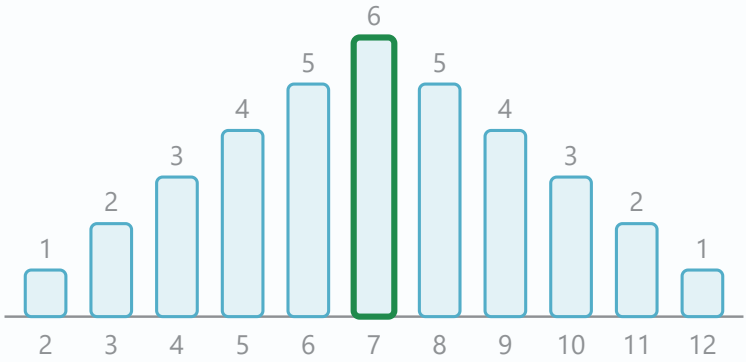
Olasılık Dağılımı

Olasılık dağılımı, her olası sonuca bir olasılık yazan bir tablodur. Her olasılık 0 ile 1 arasındadır ve hepsinin toplamı 1'dir.

Örnek: iki zarın toplamı

36 eşit olası sonuç var. Toplam 7'yi veren çiftler (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1): P(7) = **6/36**. Toplam 2 yalnızca (1,1) ile olur: P(2) = 1/36.

Kontrol: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36, yani toplam olasılık 36/36 = 1.



Sık hata: Her toplamı eşit olası sanmak ("11 farklı toplam var, her biri 1/11"). Sonuçlar (zar çiftleri) eşit olasıdır, toplamlar değil. Çubukların üstündeki sayılar 36 sonuçtan kaçının o toplamı verdiğini gösterir.

Koşullu Olasılık: Bilgi Gelince Olasılık Değişir

B olayının gerçekleştiği öğrenilince yalnız B'nin içindeki sonuçlar kalır. Bu dar dünyada A'nın payı **koşullu olasılıktır**:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$$

A ∩ B: A ve B'nin ikisinin birden gerçekleşmesi.

Örnek: trafik ışığı

Işık üç durumdan birini 1/3 olasılıkla seçer ve her sürücüye yalnız kendi işaretini gösterir. Ayşe "Dur" görüyor. P(Ayşe Dur) = 2/3, P(Ayşe Dur ∩ Bora Geç) = 1/3.

P(Bora Geç | Ayşe Dur) = (1/3) / (2/3) = **1/2**.



P(Bora Geç | Ayşe Dur) = (1/3)/(2/3) = 1/2

Sık hata: Bilgiyi yok saymak ("Bora Geç görür: 1/3") ya da yönü karıştırmak. P(A | B) ile P(B | A) genellikle farklıdır: P(Ayşe Dur | Bora Geç) = 1, ama P(Bora Geç | Ayşe Dur) = 1/2.

Bayes Kuralı: Gözlemden Sonra İnancı Güncellemek

Önce bir inanç (**ön olasılık**, P(A)) vardır; bir işaret görülünce inanç güncellenir (**son olasılık**, P(A | B)):

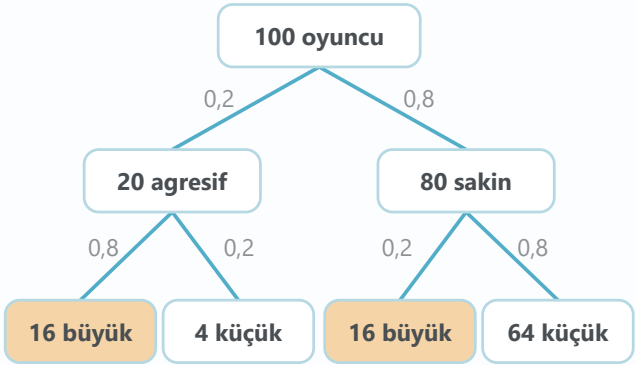
$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \cdot P(A) / P(B)$$

Örnek: büyük bahis

Oyuncuların %20'si agresif. Agresif oyuncu büyük bahsi 0,8, sakin oyuncu 0,2 olasılıkla yapar. Büyük bahis görüldü.

P(büyük) = 0,8 · 0,2 + 0,2 · 0,8 = 0,32 ⇒ P(agresif | büyük) = 0,16 / 0,32 = **1/2**.

100 kişiyle saymak aynı sonucu verir: 32 büyük bahisçiden 16'sı agresif.

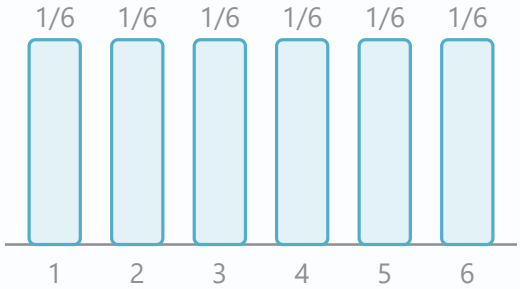


Sık hata: Ön olasılığı unutmak: "Agresifler %80 büyük bahis yapar, o hâlde bu oyuncu %80 agresif." Sakin oyuncular dört kat kalabalık olduğu için onların seyrek büyük bahsi de toplamın yarısını oluşturur.

Beklenen Değer

X, değeri şansa bağlı bir sayıdır (ör. zarın gelen yüzü). Beklenen değer, aynı deney çok kez tekrarlansaydı X'in **tur başına ortalaması** olurdu: X'in alabileceği her x değerini olasılığıyla çarp ve topla.

$$E[X] = \sum_{x} x \cdot P(X = x)$$



Örnek: adil zar

E[X] = 1·(1/6) + 2·(1/6) + 3·(1/6) + 4·(1/6) + 5·(1/6) + 6·(1/6)

= 21/6 = **3,5**

Sık hata: Beklenen değeri "en olası sonuç" ya da "kesin gelecek sonuç" sanmak. Zarda 3,5 hiç gelmez; 3,5 yalnızca çok sayıda atışın ortalamasıdır. Kazancı 0 ya da 100 olan bir piyangonun beklenen değeri 30 olabilir ama piyango hiçbir zaman 30 ödemez.

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
odul = [100, 20, 0]          # TL
olas = [0.05, 0.25, 0.70]
E = 0
for i in range(3):
    E = E + odul[i] * olas[i]
print("E =", E)
print("net =", E - 12)  # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	...
i = 1	20 TL	0,25	...
i = 2	0 TL	0,70	...

E = 0

Üç ödül ve olasılıkları; toplam olasılık 0,05 + 0,25 + 0,70 = 1. Toplayıcı E = 0.

Adım 1 / 6

DEĞİŞKENLER

i = – E = 0

ÇIKTI

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
▶ for i in range(3):
▶     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
7 print("net =", E - 12)  # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	…
i = 2	0 TL	0,70	…

E = 5

100 · 0,05 = 5 eklenir: E = 5.

Adım 2 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 0` `odul[i] = 100` `olas[i] = 0.05` `E = 5.0`

ÇIKTI

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
▶ for i in range(3):
▶     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
7 print("net =", E - 12)  # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	...

E = 10

20 · 0,25 = 5 eklenir: E = 10.

Adım 3 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 1` `odul[i] = 20` `olas[i] = 0.25` `E = 10.0`

ÇIKTI

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
▶ for i in range(3):
▶     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
7 print("net =", E - 12)  # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	0

E = 10

0 · 0,70 = 0: boş bilet E'yi değiştirmez ama olasılığı yine sayılır.

Adım 4 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `odul[i] = 0` `olas[i] = 0.7` `E = 10.0`

ÇIKTI

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
4 for i in range(3):
5     E = E + odul[i] * olas[i]
▶ print("E =", E)
7 print("net =", E - 12)  # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	0

E = 10

Bir biletin beklenen ödülü **10 TL**.

Adım 5 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `E = 10.0`

ÇIKTI

```
E = 10.0
```

İzleme: Piyangonun Beklenen Değeri

```
1 odul = [100, 20, 0]          # TL
2 olas = [0.05, 0.25, 0.70]
3 E = 0
4 for i in range(3):
5     E = E + odul[i] * olas[i]
6 print("E =", E)
▶ print("net =", E - 12)  # bilet 12 TL
```

	ödül	olasılık	çarpım
i = 0	100 TL	0,05	5
i = 1	20 TL	0,25	5
i = 2	0 TL	0,70	0

E = 10

Bilet 12 TL: net beklenen kazanç 10 − 12 = **−2 TL**. Çok kez oynayan, bilet başına ortalama 2 TL kaybeder.

Adım 6 / 6

DEĞİŞKENLER

`i = 2` `E = 10.0`

ÇIKTI

```
E = 10.0
net = -2.0
```

Örnek: Bu Zar Oyunu Oynanır mı?

Panayırda bir oyun: **10 TL** ödeyip bir zar atıyorsun. **6** gelirse 40 TL, **5** gelirse 10 TL alıyorsun; başka bir sayıda hiçbir şey almıyorsun.

Zar	Ödül x	P(x)	x · P(x)
6	40	1/6	40/6
5	10	1/6	10/6
1, 2, 3, 4	0	4/6	0
Toplam		**6/6 = 1**	**50/6 ≈ 8,33**

Sonuç

Beklenen ödül ≈ 8,33 TL, giriş 10 TL: net ≈ **−1,67 TL** her oyunda. Risk umursanmıyorsa oynamak kârlı değil.

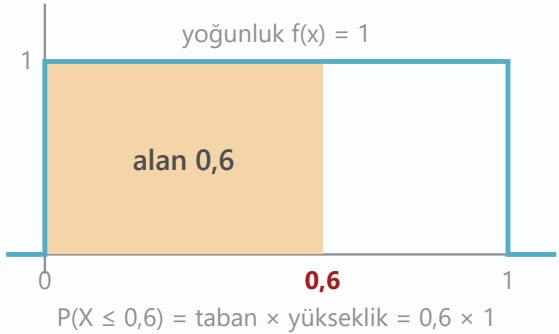
Ne olsaydı adil olurdu?

6 için ödül y olsun: (y + 10)/6 = 10 ⇒ y = **50 TL**. Bu, tek bilinmeyenli bir denklemdir.

Sık hata: "Kazanma şansım 2/6, fena değil" diye karar vermek. Kazanma olasılığı tek başına yetmez; ödüllerin büyüklüğü ve giriş ücreti de hesaba girer. Karar, net beklenen değere göre verilir.

Sürekli Düzgün Dağılım U[0, 1]

X ~ U[0, 1], “X, 0 ile 1 arasında düzgün dağılır” diye okunur: bu aralıktaki her değer eşit şanslıdır. Yoğunluk f(x) = 1 grafiğin yüksekliğidir; olasılık bu yüksekliğin altındaki alandır. Sonsuz çok değer olduğu için tek bir noktanın olasılığı 0'dır; bir **aralığın** olasılığı onun uzunluğudur: P(a ≤ X ≤ b) = b − a, özellikle **P(X ≤ x) = x**.



Örnek: rakibin değeri

Rakibin değeri U[0, 1]. 0,6 teklif onu P(X ≤ 0,6) = **0,6** olasılıkla geçer.

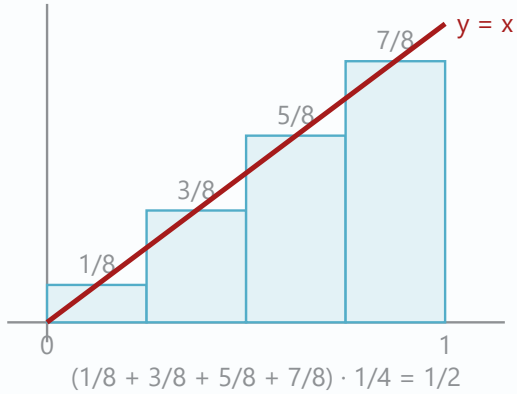
İki bağımsız rakip: ikisini birden geçmek 0,6 · 0,6 = **0,36**.

P(0,2 ≤ X ≤ 0,5) = 0,3. Ortalama E[X] = **1/2**.

Sık hata: Yoğunluğun yüksekliğini (1) olasılık sanmak ya da P(X = 0,5)'e pozitif bir değer vermek. Sürekli dağılımda olasılık bir *alandır*: taban (aralık) × yükseklik.

İntegral: Eğri Altındaki Alan

$\int_a^b f(x)\,dx$, f'nin grafiği altında a ile b arasındaki **alandır**: Σ'nın sürekli hâli. Alan ince dikdörtgenlere bölünüp toplanır; dikdörtgenler inceldikçe toplam integrale yaklaşır.



Örnek

$\int_0^1 x\,dx$ = taban 1, yükseklik 1 olan üçgenin alanı = **1/2**. Genel olarak $\int_0^b x\,dx = b^2/2$.

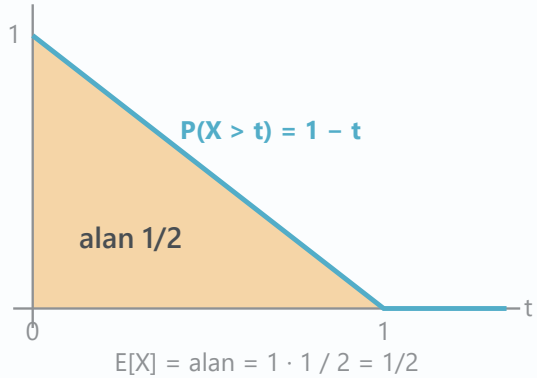
U[0, 1] için olasılık ve beklenen değer birer alandır: $P(X \le b) = \int_0^b 1\,dx = b$, $E[X] = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = \mathbf{1/2}$.

Sık hata: İntegrali eğrinin bir noktadaki yüksekliği sanmak. $\int_0^1 x\,dx$ sonucu x = 1'deki yükseklik (1) değil, birikmiş alan olan 1/2'dir; $E[X] = \int x \cdot f(x)\,dx$, $E[X] = \Sigma\, x \cdot P(x)$ formülünün sürekli karşılığıdır.

Beklenen Değer ve Kuyruk Olasılığı

P(X > t), X'in t'yi aşma olasılığıdır; buna **kuyruk olasılığı** denir. X ≥ 0 ise beklenen değer, kuyruk olasılığının altındaki alandır:

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > t)\, dt$$



Örnek

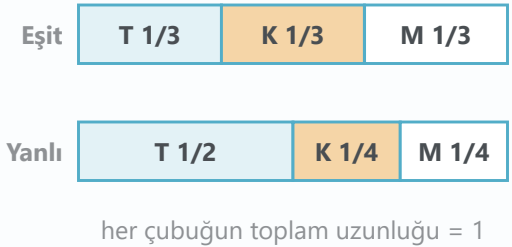
X ~ U[0, 1]: P(X > t) = 1 − t (0 ≤ t ≤ 1), t > 1 için 0. E[X] = $\int_0^1 (1 - t)\, dt$ = taban 1, yükseklik 1 olan üçgenin alanı = **1/2** ✓

Tam sayılı X için toplam hâli: E[X] = P(X ≥ 1) + P(X ≥ 2) + … Zarda 6/6 + 5/6 + … + 1/6 = 21/6 = **3,5** ✓

Sık hata: Yoğunluğun altındaki alanı beklenen değer sanmak. U[0, 1]'de yoğunluğun altındaki alan 1'dir (toplam olasılık); E[X] = 1/2 ise P(X > t) eğrisinin altındaki alandır. Formül yalnız X ≥ 0 için geçerlidir.

Karışık Strateji Fikri

Karışık strateji (mixed strategy), oyuncunun kendi eylemleri üzerine koyduğu bir olasılık dağılımıdır: "Hangi hamleyi yapacağımı bir zar/para karar versin."



Örnek

Zar at: 1–2 → Taş, 3–4 → Kağıt, 5–6 → Makas. Bu, (1/3, 1/3, 1/3) karışık stratejisidir.

Yazı-tura at, yazıda Taş; turada ikinci bir yazı-tura ile Kağıt ya da Makas: (1/2, 1/4, 1/4).

Tek bir eylemi kesin oynamak **saf strateji**dir: (1, 0, 0) = hep Taş.

Sık hata: Karışık stratejiyi "sırayla değiştirmek" sanmak (Taş, Kağıt, Makas, Taş, …). Bu düzen tahmin edilebilir ve kolayca yenilir. Karışık stratejide her turda *tek bir* saf hamle oynanır; hangisinin oynanacağı rastgele seçilir.

KARIŞIK STRATEJİ

Karışık Stratejiye Karşı Beklenen Kazanç

Bora (1/2 Taş, 1/4 Kağıt, 1/4 Makas) oynuyor. Ayşe'nin her saf hamlesinin beklenen kazancı: tablodaki satırı Bora'nın olasılıklarıyla çarp ve topla.

Ayşe ↓ / Bora →	Taş (1/2)	Kağıt (1/4)	Makas (1/4)	Beklenen kazanç
Taş	0	−1	+1	0 − 1/4 + 1/4 = **0**
Kağıt	+1	0	−1	1/2 + 0 − 1/4 = **1/4**
Makas	−1	+1	0	−1/2 + 1/4 + 0 = **−1/4**

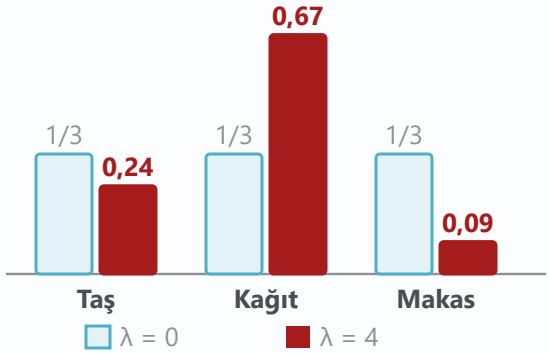
argmax = **Kağıt**: Taş ağırlıklı bir rakibe karşı Kağıt tur başına ortalama 1/4 puan kazandırır. Beklenen değer + argmax birlikte "en iyi tepki" verir.

Sık hata: Yalnızca rakibin en sık hamlesine bakmak. Bora (0,4 Taş, 0,25 Kağıt, 0,35 Makas) oynasaydı Taş'ı yenen Kağıt 0,4 − 0,35 = 0,05 getirirdi; Taş ise −0,25 + 0,35 = 0,10 getirir. Her satırın beklenen değerini hesaplamadan karar verme.

KARIŞIK STRATEJİ

Üstel Oranlar: Logit ve Softmax

Değerleri v_1, …, v_k olan seçeneklere olasılık vermenin yumuşak yolu **softmax**'tır: $P(i) = e^{\lambda v_i} / \Sigma_j e^{\lambda v_j}$. İki seçenekte buna **logit** denir: $P(1) = 1 / (1 + e^{-\lambda(v_1 - v_2)})$. $\lambda \geq 0$ duyarlılıktır: $\lambda = 0$'da hepsi eşit, λ büyüdükçe olasılık argmax'ta toplanır.



Örnek

Beklenen kazançlar Taş 0, Kağıt 1/4, Makas −1/4 ve $\lambda = 4$: üsler 0, 1, −1.

$e^0 = 1$, $e^1 \approx 2{,}718$, $e^{-1} \approx 0{,}368$; toplam ≈ 4,086. $P \approx$ (**0,24**, **0,67**, **0,09**).

Sık hata: Değerleri doğrudan toplamlarına bölmek ($v_i / \Sigma v_j$). Değerler sıfır ya da negatif olabilir: 0 + 1/4 − 1/4 = 0'a bölünemez. e^x her zaman pozitif olduğu için kullanılır; $e^a/e^b = e^{a-b}$ olduğundan tüm değerlere aynı sayıyı eklemek olasılıkları değiştirmez.

KAZANÇ MATRİSİ

Kazanç Matrisini Okumak

Satırları **satır oyuncusu**, sütunları **sütun oyuncusu** seçer; ikisinin kesiştiği hücre oyunun sonucudur. Hücredeki (a, b): **a** satır, **b** sütun oyuncusunun kazancı.

		Bora (tahmin)	
		Kırmızı	Siyah
Ayşe (kart)	Kırmızı	(−3 , 3)	(1 , −1)
	Siyah	(1 , −1)	(−1 , 1)

Örnek: Kart Gösterme

Ayşe elinde kırmızı ya da siyah bir kart tutar; Bora rengi tahmin eder. Bora kırmızıyı bilirse Ayşe'den 3, siyahı bilirse 1 jeton alır; yanılırsa Ayşe'ye 1 jeton verir. (Kırmızı, Kırmızı) = (−3, 3): Ayşe kırmızı tuttu, Bora bildi; Ayşe 3 verir, Bora 3 alır. Her hücrede a + b = 0: oyun **sıfır toplamlıdır**.

Sık hata: b sayısını satır oyuncusunun kazancı sanmak ya da Ayşe'nin sonucu tek başına seçtiğini düşünmek. Ayşe yalnızca *satırı* seçer; hangi hücreye düşeceğini Bora'nın sütunu belirler.

KAZANÇ MATRİSİ

Matrisi Okuma Alıştırması

Ayşe (kart) \ Bora (tahmin)	Kırmızı	Siyah
Kırmızı	(−3 , 3)	(1 , −1)
Siyah	(1 , −1)	(−1 , 1)

1. Ayşe Siyah tutar, Bora "Kırmızı" derse kim kaç jeton alır?
2. Ayşe Siyah tutarken Bora'nın alabileceği kazançlar hangileri?
3. Bora her turda "Kırmızı" diyorsa Ayşe hangi kartı tutmalı?
4. Oyunda Ayşe'nin alabileceği en büyük ve en küçük kazanç kaç?

▶ **Cevapları göster**

KAZANÇ MATRİSİ

Beklenen Kazanç Matris–Vektör Çarpımıdır: x^TAy

Karışık strateji bir **olasılık vektörüdür**: $x = (x_1, \ldots, x_m)$, her $x_i \geq 0$ ve toplamı 1. A satır oyuncusunun kazanç matrisi olsun. **Ay**: A'nın her satırını y ile çarp ve topla; çıkan her sayı o satırın y'ye karşı beklenen kazancıdır. **x^TAy**: bu satır beklentilerini x'in olasılıklarıyla tartıp topla. (^{T}, x'in satır olarak yazıldığını gösterir.)

Örnek: Kart Gösterme (Ayşe'nin kazançları)

A = [[−3, 1], [1, −1]], Ayşe x = (1/2, 1/2), Bora y = (1/4, 3/4).

Ay = (−3/4 + 3/4, 1/4 − 3/4) = (0, −1/2); x^TAy = ½ · 0 + ½ · (−½) = **−1/4**.

	y = (1/4, 3/4)		
	1/4	3/4	Ay
x = (1/2, 1/2)			
1/2	−3	1	0
1/2	1	−1	−1/2

$x^TAy = ½ \cdot 0 + ½ \cdot (−½) = −1/4$

Sık hata: Ay'yi bulup orada durmak ya da x ile y'yi ters yerde kullanmak. y sütunları tartar (Ay: her satırın beklentisi), x de bu satır beklentilerini tartar. Ay'nin en büyük elemanı Ayşe'nin y'ye karşı en iyi saf tepkisini verir.

En İyi Tepki

"Rakibin ne yapacağını bilseydim ne yapardım?" sorusunun cevabı **en iyi tepkidir** (best response). Rakibin seçimini sabitle, *kendi* kazançlarına bak, argmax'ı al.

Örnek: Kart Gösterme

Bora hep "Kırmızı" der: Ayşe'nin sütundaki ilk sayıları Kırmızı −3, Siyah 1 ⇒ en iyi tepki **Siyah**.

Bora hep "Siyah" der: Kırmızı 1, Siyah −1 ⇒ en iyi tepki **Kırmızı**.

Bora karıştırıyorsa: her satırın beklenen kazancını hesapla, büyüğünü seç.

Ayşe (kart) \ Bora (tahmin)	Kırmızı	Siyah
Kırmızı	(−3, 3)	(1, −1)
Siyah	(1, −1)	(−1, 1)

Sık hata: En iyi tepkiyi seçerken rakibin kazancına (ikinci sayıya) bakmak. Ayşe yalnızca kendi sayılarını karşılaştırır. Ayrıca en iyi tepki sabit değildir: rakip değişince değişebilir.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

Ayşe \ Bora	Sol	Sağ
Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

Ayşe satırı (Yukarı/Aşağı), Bora sütunu (Sol/Sağ) seçer. Henüz işaret yok.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

Ayşe \ Bora	Sol	Sağ
Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

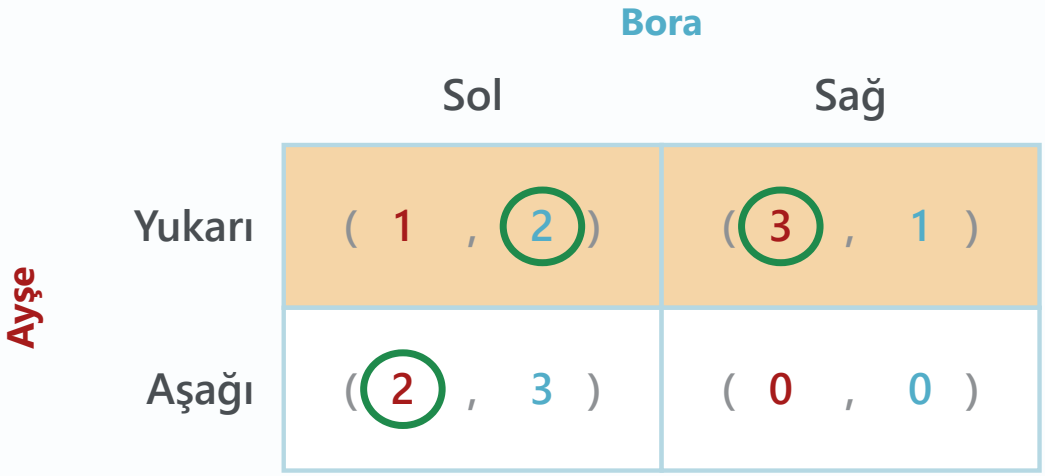
Bora **Sol** oynarsa Ayşe ilk sayıları karşılaştırır: Yukarı 1, Aşağı 2 ⇒ **Aşağı**; 2 işaretlenir.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

Ayşe \ Bora	Sol	Sağ
Yukarı	(1 , 2)	(3 , 1)
Aşağı	(2 , 3)	(0 , 0)

Bora **Sağ** oynarsa: Yukarı 3, Aşağı 0 ⇒ **Yukarı**; 3 işaretlenir.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler



Ayşe **Yukarı** oynarsa Bora ikinci sayıları karşılaştırır: Sol 2, Sağ 1 ⇒ **Sol**.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

Ayşe \ Bora	Sol	Sağ
Yukarı	(1, **2**)	(**3**, 1)
Aşağı	(**2**, **3**)	(0, 0)

Ayşe **Aşağı** oynarsa: Sol 3, Sağ 0 ⇒ **Sol**. Bora için Sol her durumda daha iyi.

İzleme: 2×2 Matriste En İyi Tepkiler

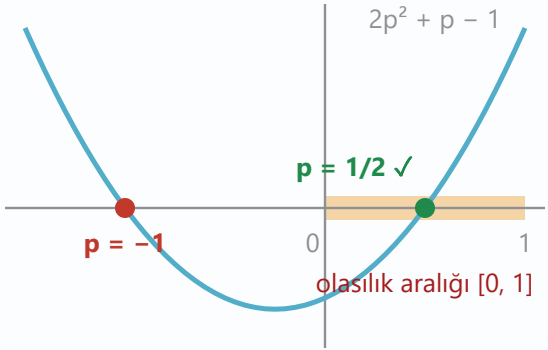


İki sayısı da işaretli tek hücre **(Aşağı, Sol) = (2, 3)**: ikisi de en iyi tepkisini oynuyor, kimse tek başına değiştirmek istemez. Bu özelliğe **Nash dengesi** denir.

İkinci Derece Denklem ve Diskriminant

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). **Diskriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ kök sayısını söyler: $\Delta > 0$ ise iki kök, $\Delta = 0$ ise tek kök, $\Delta < 0$ ise gerçek kök yok. Kökler:

$$\mathbf{x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)}$$



Örnek

Bir olasılık p için $2p^2 + p - 1 = 0$ bulundu. $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$.

$p = (-1 \pm 3)/4 \Rightarrow p = 1/2$ ya da $p = -1$. Olasılık 0 ile 1 arasında olmalı: **p = 1/2**. Kontrol: $2 \cdot 1/4 + 1/2 - 1 = 0$ ✓

Sık hata: −b yerine b yazmak ya da yalnız √Δ'yı 2a'ya bölmek: kesir çizgisi (−b ± √Δ)'nın tamamının altındadır. c negatifken −4ac'nin işaretini kaçırmak da sık görülür: burada $-4 \cdot 2 \cdot (-1) = +8$.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

(1) $2z + d = 50$ (2) $z + d = 35$ z: zar, d: deste fiyatı

Adım 1 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3$, $x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğun değerleri her iki denklemde de kontrol et.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

(1) $2z + d = 50$ (2) $z + d = 35$ z: zar, d: deste fiyatı

(1) − (2): $(2z + d) - (z + d) = 50 - 35 \Rightarrow \mathbf{z = 15}$

Adım 2 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3$, $x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğun değerleri her iki denklemde de kontrol et.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

(1) $2z + d = 50$ (2) $z + d = 35$ z: zar, d: deste fiyatı

(1) − (2): $(2z + d) - (z + d) = 50 - 35 \Rightarrow \mathbf{z = 15}$

(2)'de yerine koy: $15 + d = 35 \Rightarrow \mathbf{d = 20}$

Adım 3 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3$, $x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğun değerleri her iki denklemde de kontrol et.

İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem

İki bilinmeyen için iki denklem gerekir: çıkararak ya da yerine koyarak biri yok edilir, kalan bulunur, sonra geri yerine konur.

Örnek: oyun dükkânı

2 zar ve 1 deste kart 50 TL, 1 zar ve 1 deste 35 TL. Birer tanesi kaç TL?

(1) $2z + d = 50$ (2) $z + d = 35$ z: zar, d: deste fiyatı

(1) − (2): $(2z + d) - (z + d) = 50 - 35 \Rightarrow \mathbf{z = 15}$

(2)'de yerine koy: $15 + d = 35 \Rightarrow \mathbf{d = 20}$

Kontrol (1): $2 \cdot 15 + 20 = 50$ ✓

Adım 4 / 4

Oyun kuramındaki tipik biçim: olasılıklar x ve y için $x + y = 1$ ve $x = 2y \Rightarrow 2y + y = 1 \Rightarrow y = 1/3$, $x = 2/3$.

Sık hata: Çıkarırken bir tarafı unutmak ya da işareti kaybetmek: $(2z + d) - (z + d)$ işleminde $d - d = 0$ olur, sağ taraf da $50 - 35$ olmalıdır. Bulduğun değerleri her iki denklemde de kontrol et.

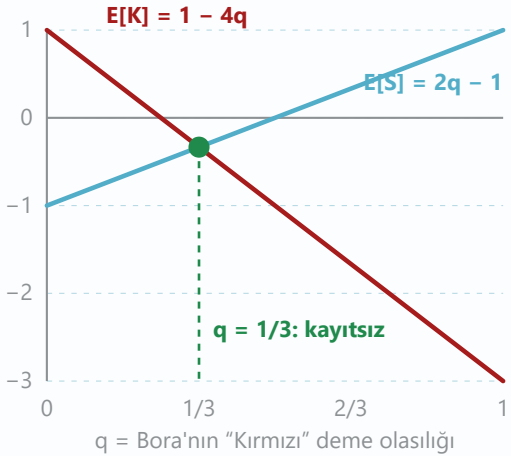
Kayıtsızlık Fikri

Bir oyuncu iki eylemi arasında gerçekten karıştırıyorsa iki eylem ona **eşit** beklenen kazanç vermelidir; biri daha iyi olsaydı hep onu oynardı. Buna **kayıtsızlık** denir.

Kart Gösterme'de

Bora "Kırmızı"yı q olasılıkla derse Ayşe için $E[K] = -3q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 4q$ ve $E[S] = 1 \cdot q - 1 \cdot (1 - q) = 2q - 1$.

$q < 1/3$: Kırmızı daha iyi. $q > 1/3$: Siyah daha iyi. Yalnız $q = 1/3$'te Ayşe kayıtsızdır.



Sık hata: Ayşe'nin kendi olasılığını kendi kayıtsızlık denkleminden bulmaya çalışmak. Ayşe'nin kayıtsızlığı *Bora'nın* q değerini belirler. Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı p ise p, Bora'yı kayıtsız bırakan denklemden çıkar.

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

Ayşe \ Bora	"K"	"S"
K	(−3 , 3)	(1 , −1)
S	(1 , −1)	(−1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Bora'nın "Kırmızı" deme olasılığı.

Bora "Kırmızı"yı **q**, "Siyah"ı **1 − q** olasılıkla desin (toplam 1).

Adım 1 / 5

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

Ayşe \ Bora	"K"	"S"
K	(−3 , 3)	(1 , −1)
S	(1 , −1)	(−1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Bora'nın "Kırmızı" deme olasılığı.

Bora "Kırmızı"yı **q**, "Siyah"ı **1 − q** olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = \mathbf{1 - 4q}$

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

Ayşe \ Bora	"K"	"S"
K	(−3 , 3)	(1 , −1)
S	(1 , −1)	(−1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Bora'nın "Kırmızı" deme olasılığı.

Bora "Kırmızı"yı **q**, "Siyah"ı **1 − q** olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = \mathbf{1 - 4q}$

Ayşe Siyah tutarsa: $E[S] = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = \mathbf{2q - 1}$

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

Ayşe \ Bora	"K"	"S"
K	(−3 , 3)	(1 , −1)
S	(1 , −1)	(−1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Bora'nın "Kırmızı" deme olasılığı.

Bora "Kırmızı"yı **q**, "Siyah"ı **1 − q** olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: $E[K] = -3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = \mathbf{1 - 4q}$

Ayşe Siyah tutarsa: $E[S] = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = \mathbf{2q - 1}$

Kayıtsızlık: $1 - 4q = 2q - 1 \Rightarrow 2 = 6q \Rightarrow \mathbf{q = 1/3}$

İzleme: Kayıtsızlık Denklemi

Ayşe \ Bora	"K"	"S"
K	(−3 , 3)	(1 , −1)
S	(1 , −1)	(−1 , 1)

p: Ayşe'nin Kırmızı tutma olasılığı. q: Bora'nın "Kırmızı" deme olasılığı.

Bora "Kırmızı"yı **q**, "Siyah"ı **1 − q** olasılıkla desin (toplam 1).

Ayşe Kırmızı tutarsa: E[K] = −3 · q + 1 · (1 − q) = **1 − 4q**

Ayşe Siyah tutarsa: E[S] = 1 · q + (−1) · (1 − q) = **2q − 1**

Kayıtsızlık: 1 − 4q = 2q − 1 ⇒ 2 = 6q ⇒ **q = 1/3**

Kontrol: E[K] = 1 − 4/3 = −1/3 ve E[S] = 2/3 − 1 = −1/3 ✓ Bora q = 1/3 seçince Ayşe hangi kartı tutarsa tutsun aynı beklenen kazancı alır.

Oyuna Dönüş: Taş-Kağıt-Makas

Yenilmeyen oynayış var mı?
Evet: (1/3, 1/3, 1/3). Rakip ne oynarsa oynasın beklenen kazanç 0'dır; ör. rakip Kağıt: $1/3 \cdot (-1) + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot (+1) = 0$. Üç hamle de kayıtsız olduğu için sömürülecek bir taraf kalmaz.

Hep Taş oynayan ne kaybeder?
Rakibin en iyi tepkisi hep Kağıt: tur başına **−1**. Daha hafif bir yanlılık da kaybettirir: (1/2, 1/4, 1/4) oynayana karşı Kağıt, $1/2 \cdot (-1) + 1/4 \cdot 0 + 1/4 \cdot (+1) = -1/4$ getirir.

Senin karışımın (T, K, M)	Rakibin en iyi tepkisi	Senin beklenen kazancın
(1, 0, 0): hep Taş	Kağıt	−1
(1/2, 1/4, 1/4)	Kağıt	−1/4
(1/3, 1/3, 1/3)	hepsi eşit	0

İnsanlar nasıl oynuyor? Laboratuvar deneylerinde her hamlenin sıklığı 1/3'e yakın çıksa da ardışık hamleler bağımsız değildir: kazanan aynı hamleyi tekrarlamaya, kaybeden hamlesini değiştirmeye eğilimlidir (Wang, Xu ve Zhou, 2014). Örüntü öğrenen bir rakip tam olarak bunu sömürür.

OYUN AĞACI

Oyun Ağacını Okumak

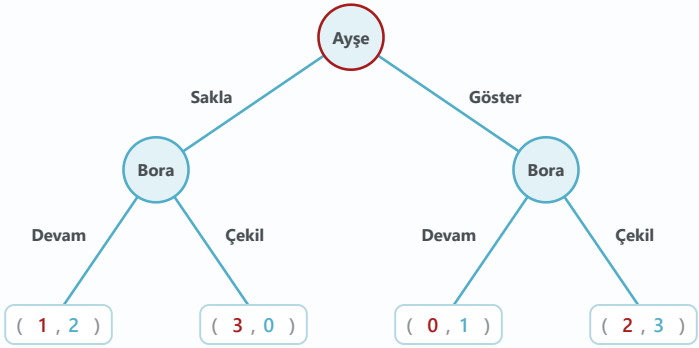
Sıralı oyunlarda **oyun ağacı** kullanılır: daire içindeki düğüm sıranın kimde olduğunu, dallar eylemleri, alttaki **yapraklar** oyun bitince (Ayşe, Bora) kazançlarını gösterir.

Örnek

Ayşe kartını saklar ya da gösterir. Bora, Ayşe'nin ne yaptığını *görerek* devam eder ya da çekilir.

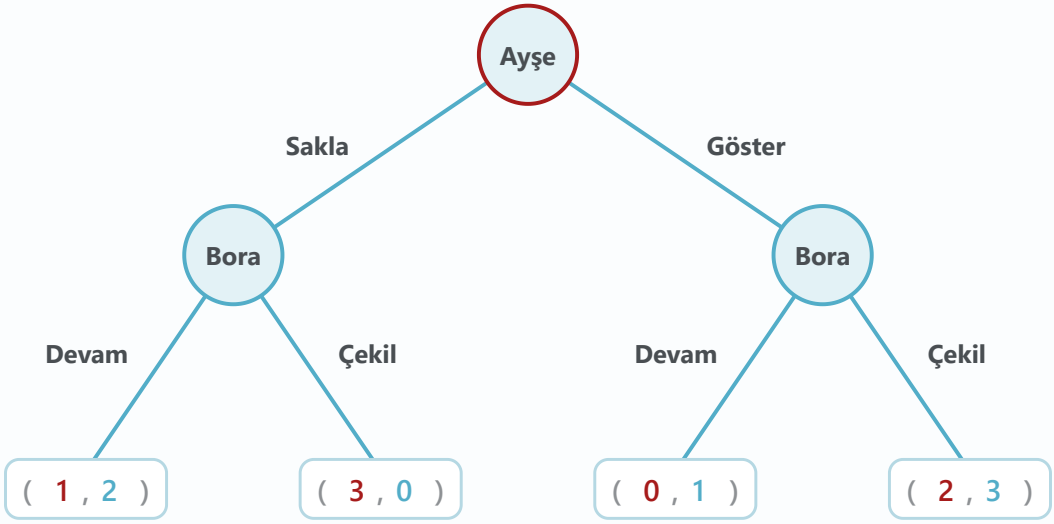
Yol Sakla → Çekil: yaprak (3, 0); Ayşe 3, Bora 0 alır.

Bora'nın iki düğümü vardır; her birinde ayrı karar verir.



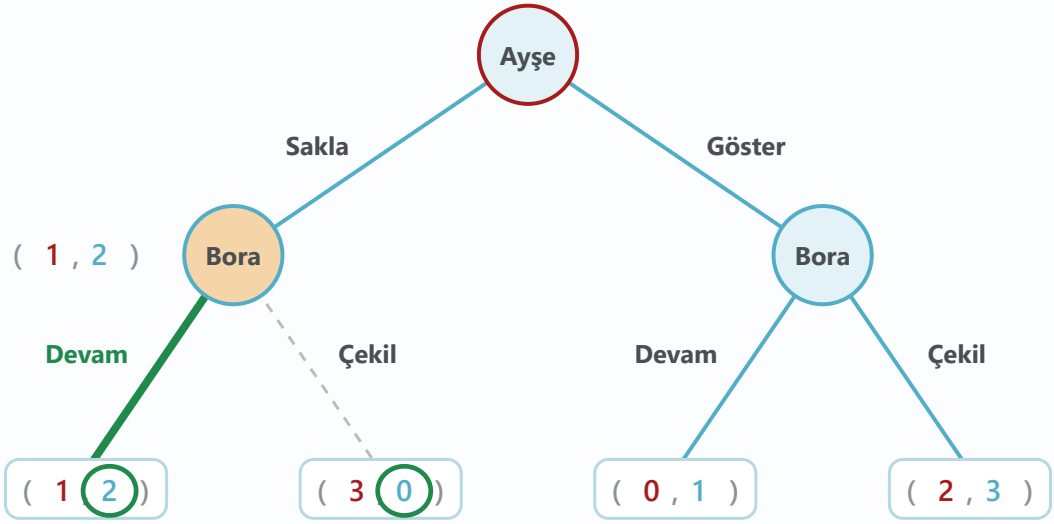
Sık hata: Yapraktaki sırayı karıştırmak: ilk sayı ilk hamleyi yapan oyuncunun (Ayşe), ikinci sayı Bora'nın kazancıdır. Bir de matristen farkı unutmak: burada Bora, Ayşe'nin hamlesini *görür*.

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



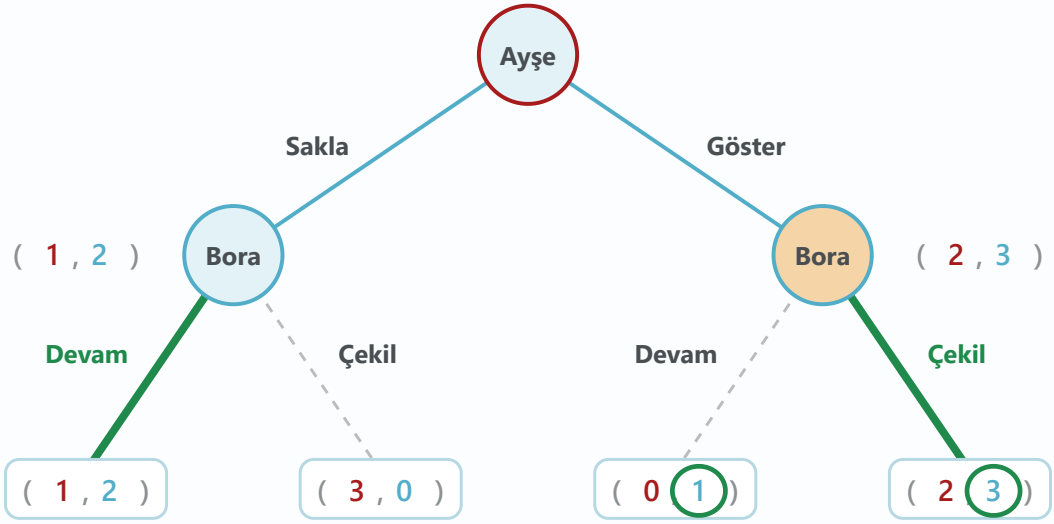
Fikir: **son** hamleyi yapandan başla. Bora'nın her düğümde ne seçeceği belli olunca Ayşe'nin kararı kolaylaşır.

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



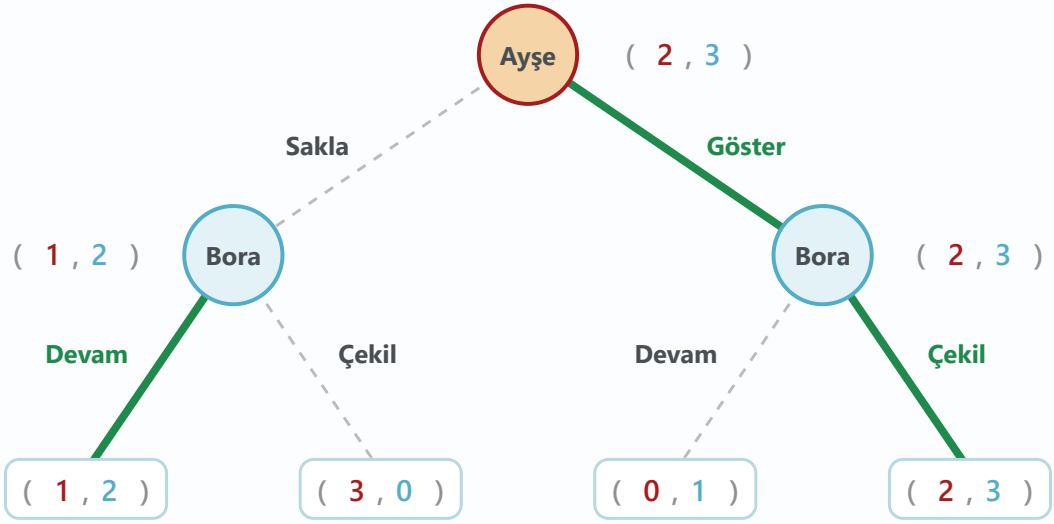
Sakla'dan sonra Bora ikinci sayıları karşılaştırır: Devam 2, Çekil 0 ⇒ **Devam**. Bu düğümün değeri (1, 2).

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



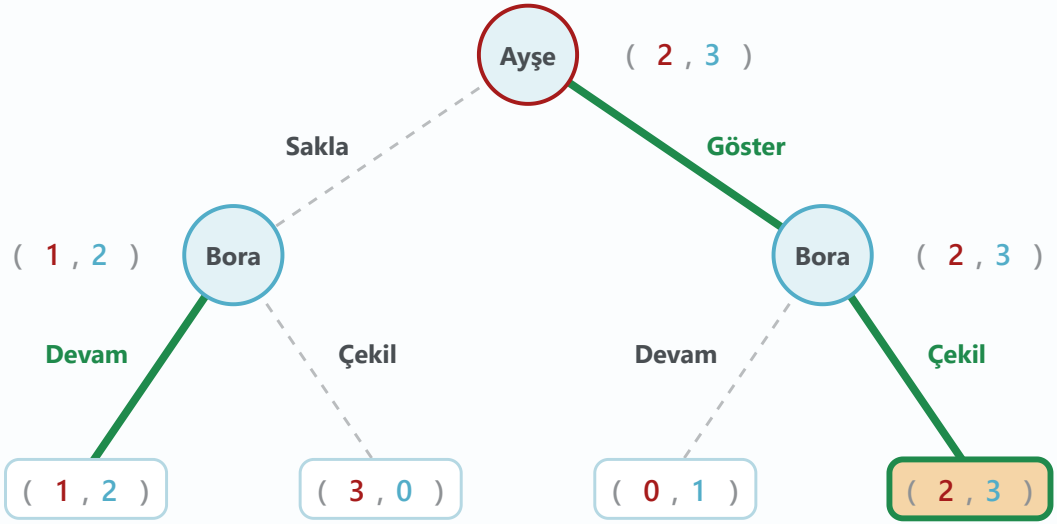
Göster'den sonra Bora: Devam 1, Çekil 3 ⇒ **Çekil**. Bu düğümün değeri (2, 3).

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



Ayşe kökte, Bora'nın cevaplarını bilerek karşılaştırır: Sakla → 1, Göster → 2 ⇒ **Göster**.

İzleme: Geriye Doğru Çıkarım



Sonuç yolu: Göster → Çekil, kazanç **(2, 3)**. (3, 0) yaprağı Ayşe için en büyük sayıdır ama Bora oraya hiç gitmez.

Büyüme Hızı: O ve Θ Gösterimi

Bir algoritmanın adım sayısı girdi büyüklüğü n ile nasıl büyür? **f(n) = O(g(n))**: büyük n için f, g'nin bir sabit katını aşmaz (üst sınır). **f(n) = Θ(g(n))**: f, g ile aynı hızda büyür (alttan ve üstten g'nin sabit katları arasında kalır). Sabit çarpanlar ve küçük terimler atılır: $3n^2 + 5n = \Theta(n^2)$.

Örnek

Sıra: $1 < \log\log n < \log n < n < n\log n < n^2 < 2^n$.

Oyun ağacında her düğümde 2 dal varsa ve ağacın derinliği d ise 2^d yaprak vardır: geriye doğru çıkarım $\Theta(2^d)$ adım sürer; d = 30'da yaklaşık 10^9.

n	$\log_2\log_2 n$	$\log_2 n$	n^2	2^n
16	2	4	256	65.536
256	3	8	65.536	$\approx 10^{77}$
65.536	4	16	$\approx 4{,}3 \cdot 10^9$	çok büyük

Sık hata: O'yu "tam olarak" sanmak: $n = O(n^2)$ doğrudur (yalnız üst sınır), ama $n = \Theta(n^2)$ yanlıştır. O ve Θ büyük n'deki eğilimi söyler; küçük n'de $\Theta(n^2)$ bir yöntem $\Theta(n)$ bir yöntemden hızlı olabilir.

ÖZET

Sık Yapılan Hatalar

Konu	Hata	Doğrusu
Profil	(Taş, Kağıt) = (Kağıt, Taş)	Sıra önemli: önce Ayşe, sonra Bora
Σ	$(\Sigma\, x_i)^2 = \Sigma\, x_i^2$	Önce terimleri hesapla, sonra topla
argmax	"argmax = 7"	argmax bir seçenektir (B); max değerdir (7)
Olasılık	En az bir 6: 1/6 + 1/6	$1 - (5/6)^2 = 11/36$
Beklenen değer	"E = 3,5 gelecek"	Uzun vadeli ortalama; tek atışta gelmeyebilir
Karışık strateji	Sırayla değiştirmek	Her tur rastgele tek bir saf hamle
Matris	b'yi satır oyuncusuna yazmak	(a, b): a satır, b sütun oyuncusunun
En iyi tepki	Rakibin sayısına bakmak	Rakibin seçimini sabitle, kendi sayılarını karşılaştır
Kayıtsızlık	p'yi Ayşe'nin denkleminden bulmak	p, Bora'yı kayıtsız bırakan denklemden çıkar
Oyun ağacı	Kökten başlamak	Yapraktan köke: önce son hamle

Özet

Gösterim
$S_1 \times S_2$: tüm profiller; u_i: i. oyuncunun kazancı.

Σ, max, argmax
Σ: hesapla, topla. max: değer; argmax: onu veren seçenek.

Üs, e ve ln
$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $x^0 = 1$; ln, e^x'in tersi; $(\ln x)' = 1/x$.

Türev kuralları
$(fg)' = f'g + fg'$; zincir: dış × iç türev; $\partial u/\partial q$: diğerleri sabit.

Olasılık
Say ve böl; bağımsızsa çarp; $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Beklenen değer
$E[X] = \Sigma\, x \cdot P(x)$; $X \geq 0$ ise $E[X] = \int P(X > t)\, dt$.

Karışık strateji
Eylemler üzerinde dağılım; softmax: $P(i) \propto e^{\lambda v_i}$.

Kazanç matrisi
(a, b): a satır, b sütun oyuncusunun kazancı.

En iyi tepki
Rakibi sabitle; kendi kazancının argmax'ı.

Denklemler
$x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$; kayıtsızlık: eylemler eşit kazanç verir.

Geriye doğru çıkarım
Yapraktan köke; sırası gelen en iyisini seçer.

O ve Θ
$\log \log n < \log n < n < n^2 < 2^n$; sabitler atılır.

ÖZET

Kendini Dene

1. İki yazı-tura atılıyor. En az bir yazı gelme olasılığı kaç?
2. Bir piyango 0,2 olasılıkla 50 TL, 0,8 olasılıkla 0 TL ödüyor; bilet 8 TL. Net beklenen kazanç kaç?
3. Kazançlar Taş: 2, Kağıt: −1, Makas: 2. max ve argmax nedir?
4. Bora (1/4 Taş, 1/2 Kağıt, 1/4 Makas) oynuyor. Ayşe'nin en iyi tepkisi hangi hamle?
5. $x + y = 1$ ve $3x = y$ ise x ve y kaçtır?
6. Zarın çift geldiği biliniyor. 6 olma olasılığı kaç?
7. $f(q) = q(6 - q)$ en büyük değerini hangi q'da alır?

▶ **Cevapları göster**

Son

Bölüm 0: Hazırlık — Oyun Kuramı İçin Gerekli Matematik

Kapsanan matematik: küme ve sayma, Σ ve seri, üs, e ve ln, türev kuralları, olasılık ve beklenen değer, softmax, matris, denklemler, O ve Θ

Sonraki bölüm: Bölüm 1: Karar Kuramı

Çalışma soruları · Terim sözlüğü · Ön koşullar