Bölüm 1: Böl ve Fethet Yaklaşımı

İleri Algoritmalar

Böl · Parçala · Yönet · Birleştir | Ana teorem | Birleştirme ve hızlı sıralama | Hızlı üs alma | Quickhull | En yakın nokta çifti | Karatsuba | Strassen

Sercan KÜLCÜ · Giresun Üniversitesi · Bilgisayar Mühendisliği

© Sercan Külcü. Tüm hakları saklıdır. · Sunumun etkileşimli HTML sürümü:
https://sercankulcu.github.io/files/advanced_algorithms/slides/Bolum_01_Bol_ve_Fethet_Yaklasimi.html

GİRİŞ

Öğrenme Çıktıları

Paradigma

Böl ve fethet (divide and conquer) yaklaşımının adımlarını açıklamak; bir problemin bu yaklaşıma uygun olup olmadığına karar vermek.

Analiz

Yineleme bağıntısını (recurrence) kurmak; ana teoremle (master theorem) böl ve fethet algoritmalarının süresini bulmak.

Geometrik algoritmalar

Quickhull ile dışbükey örtüyü ve şerit yöntemiyle en yakın nokta çiftini adım adım bulmak.

Hızlı çarpma

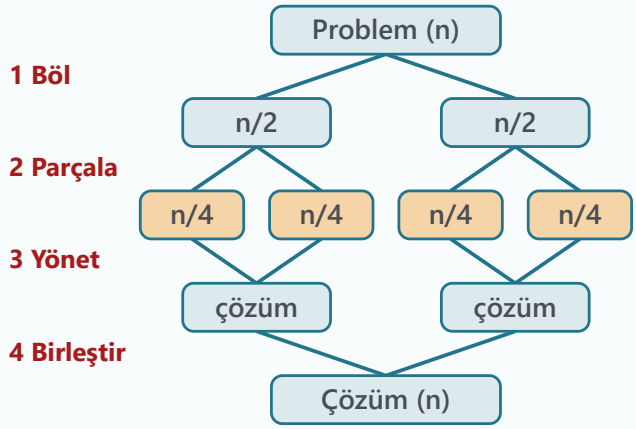
Karatsuba (tam sayı) ve Strassen (matris) çarpımının, bir özyinelemeli çağrıyı eksilterek nasıl kazanç sağladığını göstermek.

PARADİGMA

Böl–Parçala–Yönet Paradigması

Karmaşık problemleri çözmek için kullanılan etkili bir yöntemdir (*divide and conquer*, böl ve fethet). Şu adımları izler:

1. **Böl:** karmaşık problem daha küçük, yönetilebilir alt problemlere bölünür.
2. **Parçala:** alt problemler, doğrudan çözülebilecek kadar küçülene dek bölünmeye devam eder (özyineleme).
3. **Yönet:** her alt problem ayrı ayrı çözülür.
4. **Birleştir:** alt problemlerin çözümleri birleştirilerek asıl çözüm kurulur.



Anahtar: alt problemler asıl problemle **aynı türdendir** ama daha küçüktür ve birbirinden **bağımsızdır**; bu yüzden aynı fonksiyon kendini özyinelemeli çağırır.

PARADİGMA

Neden Böl ve Fethet?

- Karmaşık problemi **küçük ve yönetilebilir** parçalara ayırır; problem daha anlaşılır hale gelir, çözümü kolaylaşır.
- Alt problemlerin çözüm yöntemi (aynı fonksiyon) her düzeyde **tekrar kullanılır**: kısa ve yeniden kullanılabilir kod.
- Sıralama, arama, hesaplamalı geometri, büyük sayı ve matris aritmetiği, yapay zekâ oyunları gibi alanlarda kullanılır.

Avantajlar

+ Çoğu zaman **asimptotik kazanç**: $O(n^2) \rightarrow O(n \log n)$, $O(n) \rightarrow O(\log n)$.
+ Bağımsız alt problemler **paralel** çözülebilir.
+ Alt problemler küçüldükçe önbelleğe sığar: iyi bellek yerelliği.
+ Doğruluk kanıtı tümevarımla kolaydır.

Dezavantajlar

– Özyineleme yükü: çağrı yığını, ek bellek (ör. birleştirme sıralamasında $O(n)$).
– Alt problemler **örtüşüyorsa** aynı iş tekrar tekrar yapılır → üstel süre.
– Küçük n için sabit çarpanlar ağır basar; pratikte bir eşiğin altında basit yönteme geçilir.

PARADİGMA

Genel Şablon ve Bağıntı

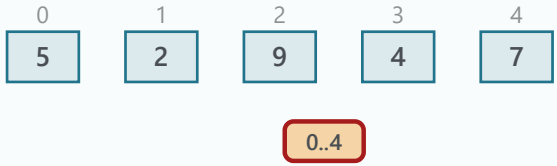
```
Sonuc bolVeFethet(Problem p) {
  if (p.boyut() <= ESIK)
    return dogrudanCoz(p);          // taban durumu
  Problem[] alt = bol(p);           // a alt problem, boyut n/b
  Sonuc[] cozum = new Sonuc[alt.length];
  for (int i = 0; i < alt.length; i++)
    cozum[i] = bolVeFethet(alt[i]); // yönet: özyineleme
  return birlestir(cozum);          // birleştir
}
```

Çalışma süresi:
T(n) = **a**·T(n/**b**) + **f(n)**
a: alt problem sayısı · n/b: alt problem boyutu · f(n): bölme + birleştirme maliyeti

- Taban durumu olmadan özyineleme bitmez.
- Bölme **dengeli** olmalı: n/2 + n/2 iyi, 1 + (n − 1) kötü.
- Hız kazancı genellikle **a**'yı azaltmaktan (Karatsuba, Strassen) ya da **f(n)**'yi küçültmekten gelir.

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
▶   int orta = (alt + ust) / 2;
▶   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```



ÇAĞRI YIĞINI

- `enBuyuk(0, 4)`
- `main()`

Dizi [5, 2, 9, 4, 7]; `enBuyuk(a, 0, 4)` çağrıldı. Aralıkta birden çok öğe var → orta = 2, önce **sol yarı** [0..2] çözülür.

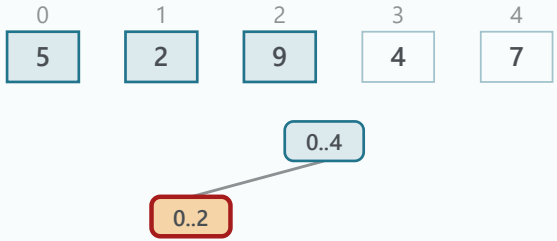
Adım 1 / 13

DEĞİŞKENLER

`alt = 0` `ust = 4` `orta = 2` `sol = ?` `sag = ?`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
▶   int orta = (alt + ust) / 2;
▶   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```



ÇAĞRI YIĞINI

- `enBuyuk(0, 2)`
- `enBuyuk(0, 4)`
- `main()`

`enBuyuk(0, 2)` : orta = 1 → önce sol yarı [0..1], sonra sağ yarı [2..2].

Adım 2 / 13

DEĞİŞKENLER

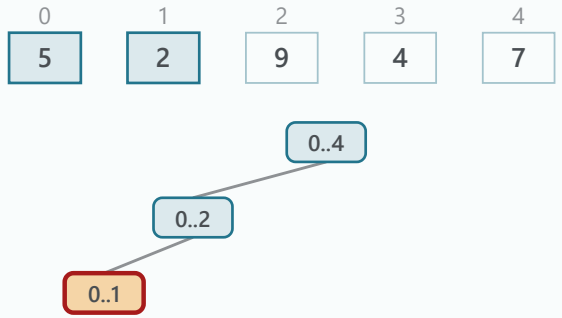
`alt = 0` `ust = 2` `orta = 1` `sol = ?` `sag = ?`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
▶   int orta = (alt + ust) / 2;
▶   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enBuyuk(0, 1)**
- enBuyuk(0, 2)
- enBuyuk(0, 4)
- main()



`enBuyuk(0, 1)` : orta = 0 → önce sol yarı [0..0], sonra sağ yarı [1..1].

Adım 3 / 13

DEĞİŞKENLER

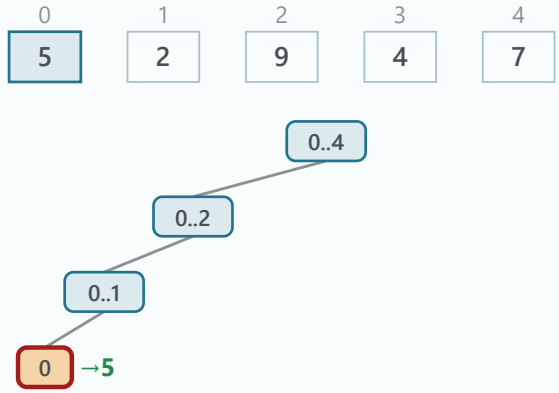
`alt = 0` `ust = 1` `orta = 0` `sol = ?` `sag = ?`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
▶   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enBuyuk(0, 0)**
- enBuyuk(0, 1)
- enBuyuk(0, 2)
- enBuyuk(0, 4)
- main()



`enBuyuk(0, 0)` : tek öğe → **taban durumu**, a[0] = **5** döner.

Adım 4 / 13

DEĞİŞKENLER

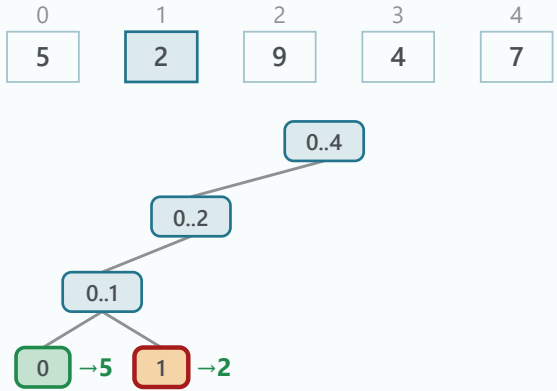
`alt = 0` `ust = 0` `orta = –` `sol = –` `sag = –`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
▶   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enBuyuk(1, 1)**
- enBuyuk(0, 1)
- enBuyuk(0, 2)
- enBuyuk(0, 4)
- main()



`enBuyuk(1, 1)` : tek öğe → **taban durumu**, a[1] = **2** döner.

Adım 5 / 13

DEĞİŞKENLER

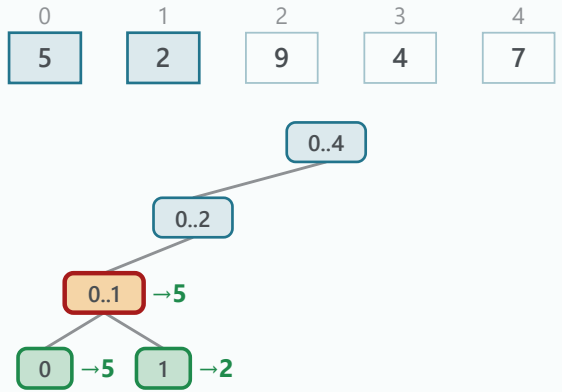
`alt = 1` `ust = 1` `orta = –` `sol = –` `sag = –`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
▶   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `enBuyuk(0, 1)`
- `enBuyuk(0, 2)`
- `enBuyuk(0, 4)`
- `main()`



`enBuyuk(0, 1)` : sol = 5, sağ = 2 → **birleştir**: max = **5** döner.

DEĞİŞKENLER

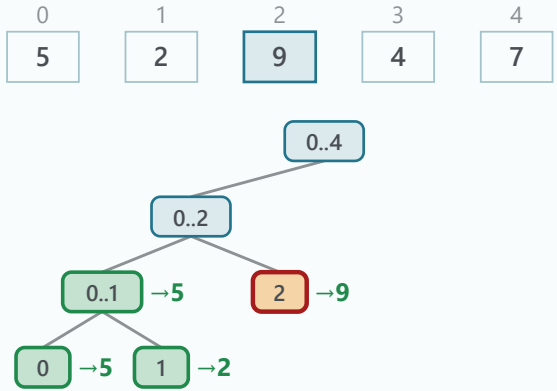
`alt = 0` `ust = 1` `orta = 0` `sol = 5` `sag = 2`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
▶   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enBuyuk(2, 2)**
- enBuyuk(0, 2)
- enBuyuk(0, 4)
- main()



`enBuyuk(2, 2)` : tek öğe → **taban durumu**, a[2] = **9** döner.

DEĞİŞKENLER

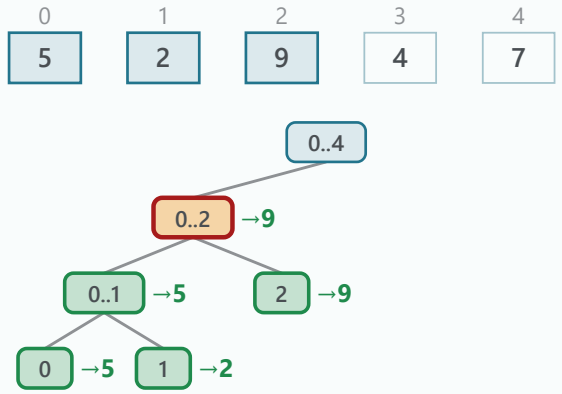
`alt = 2` `ust = 2` `orta = –` `sol = –` `sag = –`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
▶   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `enBuyuk(0, 2)`
- `enBuyuk(0, 4)`
- `main()`



`enBuyuk(0, 2)` : sol = 5, sağ = 9 → **birleştir**: max = **9** döner.

DEĞİŞKENLER

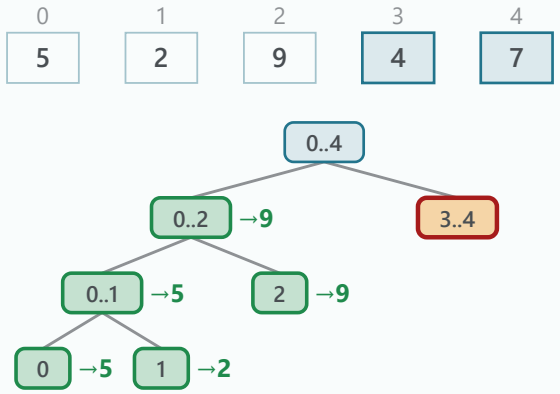
`alt = 0` `ust = 2` `orta = 1` `sol = 5` `sag = 9`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
  ▶ int orta = (alt + ust) / 2;
  ▶ int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `enBuyuk(3, 4)`
- `enBuyuk(0, 4)`
- `main()`



`enBuyuk(3, 4)` : orta = 3 → önce sol yarı [3..3], sonra sağ yarı [4..4].

Adım 9 / 13

DEĞİŞKENLER

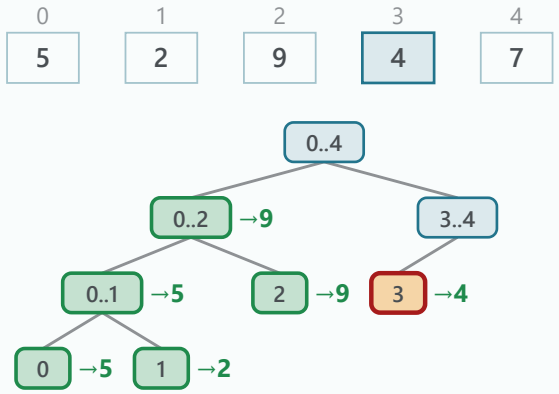
`alt = 3` `ust = 4` `orta = 3` `sol = ?` `sag = ?`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
▶   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enBuyuk(3, 3)**
- enBuyuk(3, 4)
- enBuyuk(0, 4)
- main()



`enBuyuk(3, 3)` : tek öğe → **taban durumu**, a[3] = **4** döner.

Adım 10 / 13

DEĞİŞKENLER

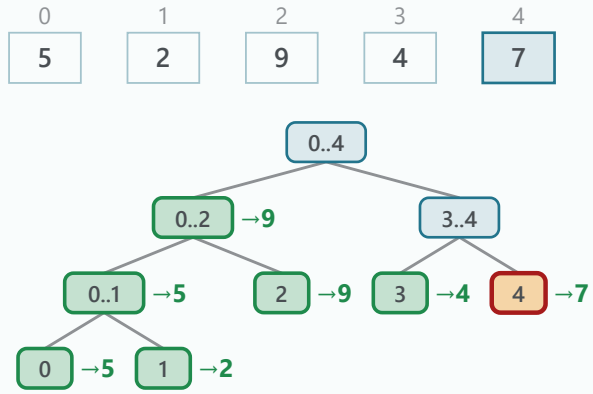
`alt = 3` `ust = 3` `orta = –` `sol = –` `sag = –`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
▶   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
6   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `enBuyuk(4, 4)`
- `enBuyuk(3, 4)`
- `enBuyuk(0, 4)`
- `main()`



`enBuyuk(4, 4)` : tek öğe → **taban durumu**, a[4] = **7** döner.

DEĞİŞKENLER

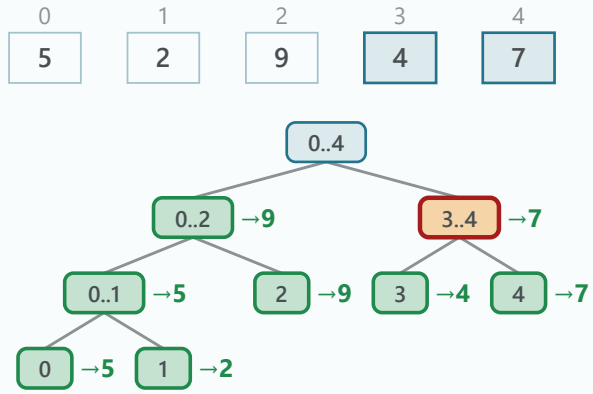
`alt = 4` `ust = 4` `orta = –` `sol = –` `sag = –`

Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
▶   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `enBuyuk(3, 4)`
- `enBuyuk(0, 4)`
- `main()`



`enBuyuk(3, 4)` : sol = 4, sağ = 7 → **birleştir**: max = **7** döner.

Adım 12 / 13

DEĞİŞKENLER

`alt = 3` `ust = 4` `orta = 3` `sol = 4` `sag = 7`

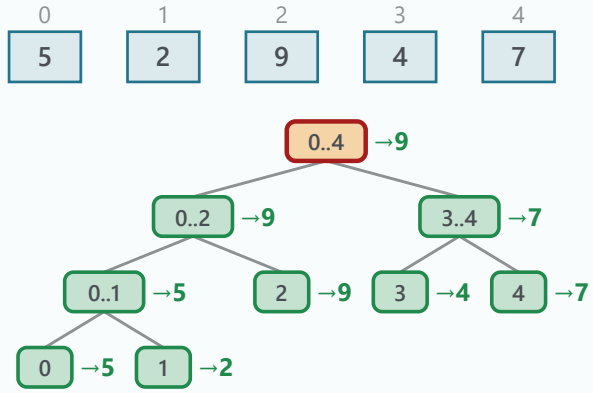
Şablonun Uygulaması: En Büyük Öğe

```
1 int enBuyuk(int[] a, int alt, int ust) {
2   if (alt == ust) return a[alt];     // taban
3   int orta = (alt + ust) / 2;
4   int sol = enBuyuk(a, alt, orta);
5   int sag = enBuyuk(a, orta + 1, ust);
▶   return Math.max(sol, sag);         // birleştir
7 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

`enBuyuk(0, 4)`

`main()`



`enBuyuk(0, 4)` : sol = 9, sağ = 7 → **birleştir**: max = **9** döner. Sonuç **9**: n yaprak, n − 1 karşılaştırma; T(n) = 2T(n/2) + O(1) = **O(n)**.

Adım 13 / 13

DEĞİŞKENLER

`alt = 0` `ust = 4` `orta = 2` `sol = 9` `sag = 7`

PARADİGMA

Klasik Böl ve Fethet Algoritmaları

Algoritma	Böl	Birleştir	Bağıntı	Süre
İkili arama	ortadaki öğeye bak, bir yarıyı at	yok	$T(n/2) + O(1)$	$O(\log n)$
Birleştirme sıralaması	diziyi ortadan ikiye böl	sıralı yarıları birleştir	$2T(n/2) + O(n)$	$O(n \log n)$
Hızlı sıralama	pivota göre bölümle	yok (yerinde)	$T(k) + T(n-k-1) + O(n)$	ort. $O(n \log n)$
Hızlı üs alma	$x^n = (x^{\lfloor n/2 \rfloor})^2 \cdot (x)$	kare al	$T(n/2) + O(1)$	$O(\log n)$
Quickhull	en uzak noktayla üçgen	örtü parçalarını ekle	$T(n_1) + T(n_2) + O(n)$	ort. $O(n \log n)$
En yakın nokta çifti	x'e göre ortadan böl	orta şeridi tara	$2T(n/2) + O(n)$	$O(n \log n)$
Karatsuba	sayıyı iki yarıya böl	3 çarpımı topla	$3T(n/2) + O(n)$	$O(n^{1,585})$
Strassen	matrisi 4 bloğa böl	7 çarpımı topla	$7T(n/2) + O(n^2)$	$O(n^{2,807})$

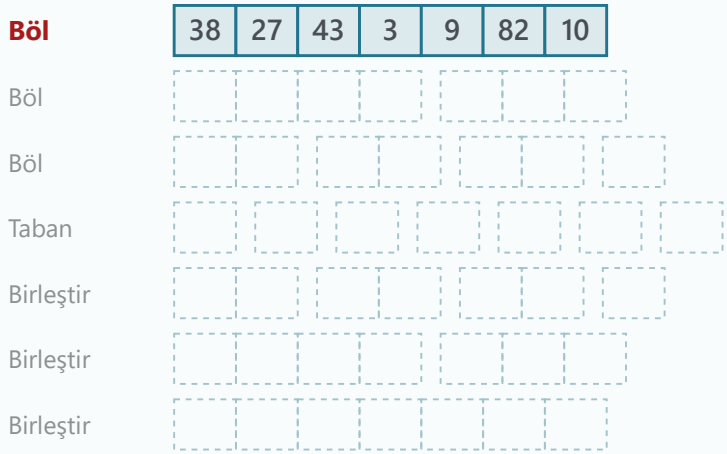
Ana Teorem ve Bölümün Algoritmaları

$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$, $a \geq 1$, $b > 1$. $f(n)$, yaprakların toplam işi $n^{\log_b a}$ ile karşılaştırılır: $f(n)$ polinom olarak küçükse **$\Theta(n^{\log_b a})$** (durum 1, yapraklar baskın), aynı mertebedeyse **$\Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$** (durum 2), polinom olarak büyükse ve düzenlilik koşulu sağlanıyorsa **$\Theta(f(n))$** (durum 3, kök baskın).

Algoritma	a	b	f(n)	$n^{\log_b a}$	Durum	T(n)
İkili arama (azalt ve fethet), hızlı üs alma	1	2	1	$n^0 = 1$	2	$\Theta(\log n)$
Birleştirme sıralaması, en yakın çift, dengeli hızlı sıralama	2	2	n	n	2	$\Theta(n \log n)$
Karatsuba	3	2	n	$n^{1,585}$	1	$\Theta(n^{1,585})$
Saf blok matris çarpımı	8	2	n^2	n^3	1	$\Theta(n^3)$
Strassen	7	2	n^2	$n^{2,807}$	1	$\Theta(n^{2,807})$

Karatsuba ve Strassen'in tüm kazancı **a**'yı bir azaltmaktan gelir: 4 → 3 ve 8 → 7. Quickhull ($T(n_1) + T(n_2) + n$) ve dengesiz hızlı sıralama ($T(n - 1) + n$) eşit olmayan bölmeler olduğundan ana teoreme uymaz; bunlar özyineleme ağacıyla çözülür.

Birleştirme Sıralaması: Böl ve Fethet Bakışı

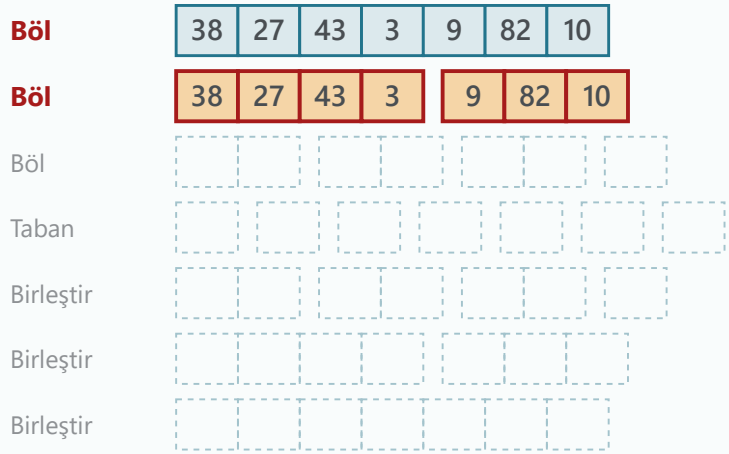


Dizi: [38, 27, 43, 3, 9, 82, 10], n = 7.

Adım 1 / 7

- **Böl:** dizi ortadan ikiye ayrılır, O(1). **Yönet:** iki yarı özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** sıralı yarılar tek geçişte birleştirilir, Θ(n).
- T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) → durum 2 → **Θ(n log n)**; en iyi, ortalama ve en kötü durumda aynı. Asıl iş birleştirmede yapılır.

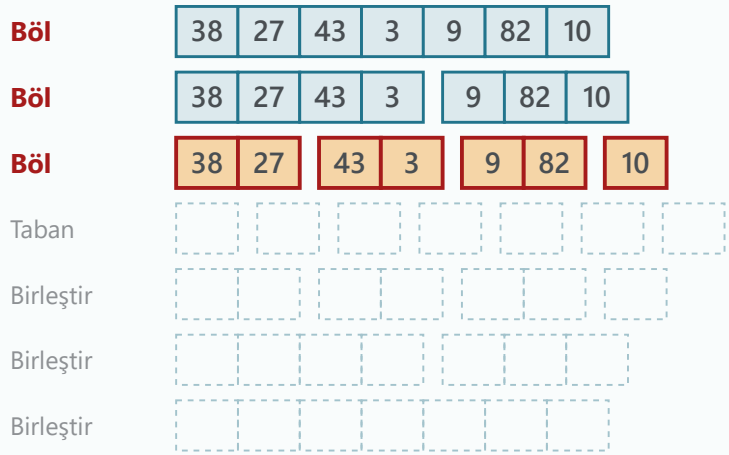
Birleştirme Sıralaması: Böl ve Fethet Bakışı



Böl: orta = (0 + 6)/2 = 3 → [38 27 43 3] ve [9 82 10].

- **Böl:** dizi ortadan ikiye ayrılır, O(1). **Yönet:** iki yarı özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** sıralı yarılar tek geçişte birleştirilir, Θ(n).
- T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) → durum 2 → **Θ(n log n)**; en iyi, ortalama ve en kötü durumda aynı. Asıl iş birleştirmede yapılır.

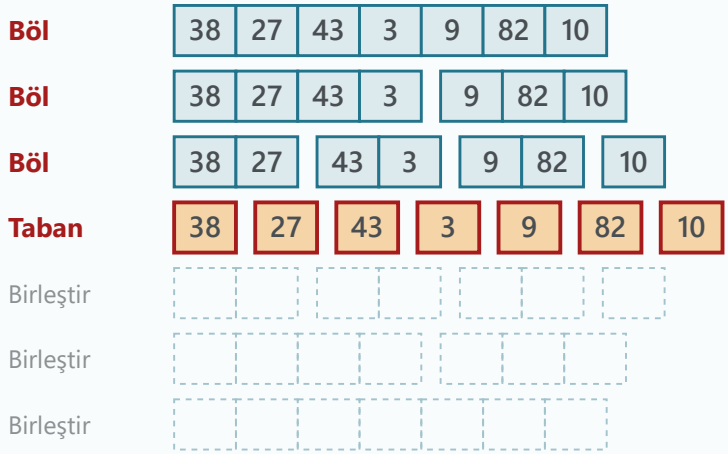
Birleştirme Sıralaması: Böl ve Fethet Bakışı



Yarılar yeniden bölünür: [38 27] [43 3] [9 82] [10].

- **Böl:** dizi ortadan ikiye ayrılır, O(1). **Yönet:** iki yarı özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** sıralı yarılar tek geçişte birleştirilir, Θ(n).
- T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) → durum 2 → **Θ(n log n)**; en iyi, ortalama ve en kötü durumda aynı. Asıl iş birleştirmede yapılır.

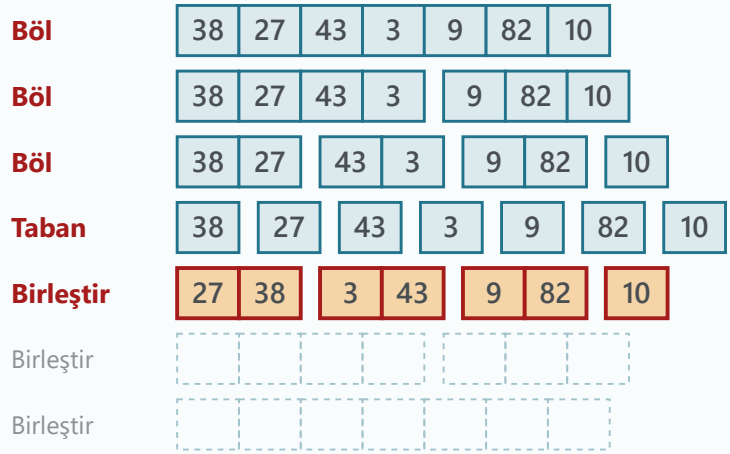
Birleştirme Sıralaması: Böl ve Fethet Bakışı



Tek öğeli diziler zaten sıralıdır: **taban durumu**.

- **Böl:** dizi ortadan ikiye ayrılır, O(1). **Yönet:** iki yarı özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** sıralı yarılar tek geçişte birleştirilir, Θ(n).
- T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) → durum 2 → **Θ(n log n)**; en iyi, ortalama ve en kötü durumda aynı. Asıl iş birleştirmede yapılır.

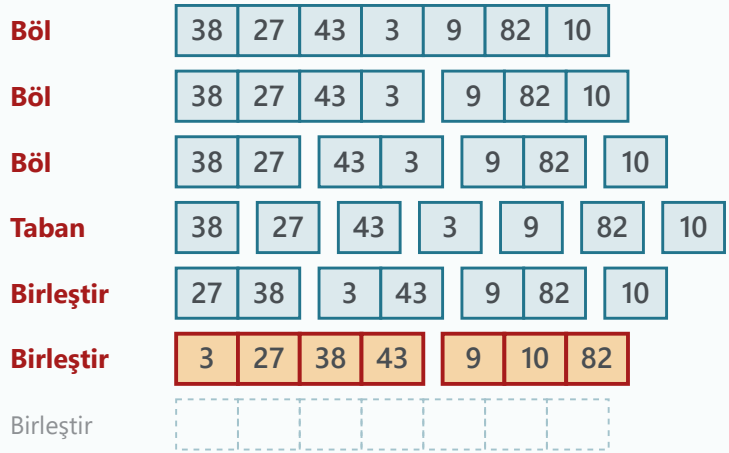
Birleştirme Sıralaması: Böl ve Fethet Bakışı



Birleştir: ikililer sıralı birleşir: [27 38] [3 43] [9 82] [10].

- **Böl:** dizi ortadan ikiye ayrılır, O(1). **Yönet:** iki yarı özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** sıralı yarılar tek geçişte birleştirilir, Θ(n).
- T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) → durum 2 → **Θ(n log n)**; en iyi, ortalama ve en kötü durumda aynı. Asıl iş birleştirmede yapılır.

Birleştirme Sıralaması: Böl ve Fethet Bakışı

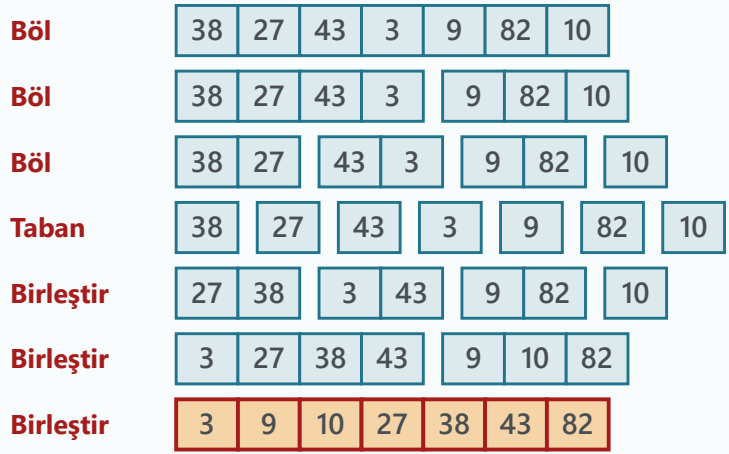


[3 27 38 43] ve [9 10 82]: her birleştirme, iki yarının uzunluk toplamı kadar adım.

Adım 6 / 7

- **Böl:** dizi ortadan ikiye ayrılır, O(1). **Yönet:** iki yarı özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** sıralı yarılar tek geçişte birleştirilir, Θ(n).
- T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) → durum 2 → **Θ(n log n)**; en iyi, ortalama ve en kötü durumda aynı. Asıl iş birleştirmede yapılır.

Birleştirme Sıralaması: Böl ve Fethet Bakışı



Son birleştirme: **[3 9 10 27 38 43 82]**. Her düzey O(n), $[\log_2 7] = 3$ düzey.

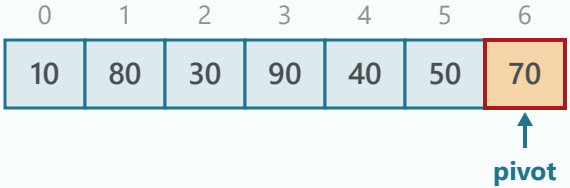
Adım 7 / 7

- **Böl:** dizi ortadan ikiye ayrılır, O(1). **Yönet:** iki yarı özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** sıralı yarılar tek geçişte birleştirilir, Θ(n).
- T(n) = 2T(n/2) + Θ(n) → durum 2 → **Θ(n log n)**; en iyi, ortalama ve en kötü durumda aynı. Asıl iş birleştirmede yapılır.

TEMEL ÖRNEKLER

Hızlı Sıralama: Böl ve Fethet Bakışı

Böl: pivota göre bölümlenir, Θ(n). **Yönet:** iki parça özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** yok; parçalar yerinde sıralanır. Asıl iş bölmede yapılır.



Dizi [10 80 30 90 40 50 70]; Lomuto bölümlemesi: **son öğe pivot** (70).

Adım 1 / 7

Dengeli bölme

Pivot ortanca civarındaysa T(n) = 2T(n/2) + O(n) → **O(n log n)** (ortalama durum).

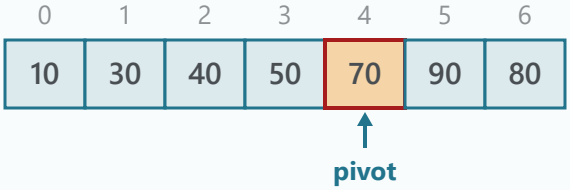
Dengesiz bölme

Sıralı girişte son öğe pivot: T(n) = T(n − 1) + O(n) → **O(n^2)**. Çare: rastgele pivot, üçün ortancası.

TEMEL ÖRNEKLER

Hızlı Sıralama: Böl ve Fethet Bakışı

Böl: pivota göre bölümlenir, Θ(n). **Yönet:** iki parça özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** yok; parçalar yerinde sıralanır. Asıl iş bölmede yapılır.



bölümle(dizi, 0, 6), pivot **70** → indis 4'e yerleşti. Sol: [10 30 40 50], sağ: [90 80].

Adım 2 / 7

Dengeli bölme

Pivot ortanca civarındaysa T(n) = 2T(n/2) + O(n) → **O(n log n)** (ortalama durum).

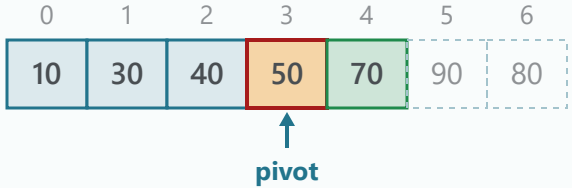
Dengesiz bölme

Sıralı girişte son öğe pivot: T(n) = T(n − 1) + O(n) → **O(n^2)**. Çare: rastgele pivot, üçün ortancası.

TEMEL ÖRNEKLER

Hızlı Sıralama: Böl ve Fethet Bakışı

Böl: pivota göre bölümlenir, Θ(n). **Yönet:** iki parça özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** yok; parçalar yerinde sıralanır. Asıl iş bölmede yapılır.



bölümle(dizi, 0, 3), pivot **50** → indis 3'e yerleşti. Sol: [10 30 40], sağ: [—]. **Dengesiz bölme!**

Adım 3 / 7

Dengeli bölme

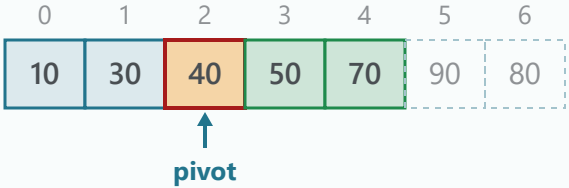
Pivot ortanca civarındaysa T(n) = 2T(n/2) + O(n) → **O(n log n)** (ortalama durum).

Dengesiz bölme

Sıralı girişte son öğe pivot: T(n) = T(n − 1) + O(n) → **O(n^2)**. Çare: rastgele pivot, üçün ortancası.

Hızlı Sıralama: Böl ve Fethet Bakışı

Böl: pivota göre bölümlenir, Θ(n). **Yönet:** iki parça özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** yok; parçalar yerinde sıralanır. Asıl iş bölmede yapılır.



bölümle(dizi, 0, 2), pivot **40** → indis 2'ye yerleşti. Sol: [10 30], sağ: [—]. **Dengesiz bölme!**

Dengeli bölme

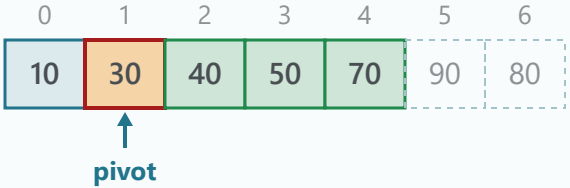
Pivot ortanca civarındaysa T(n) = 2T(n/2) + O(n) → **O(n log n)** (ortalama durum).

Dengesiz bölme

Sıralı girişte son öğe pivot: T(n) = T(n − 1) + O(n) → **O(n^2)**. Çare: rastgele pivot, üçün ortancası.

Hızlı Sıralama: Böl ve Fethet Bakışı

Böl: pivota göre bölümlenir, Θ(n). **Yönet:** iki parça özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** yok; parçalar yerinde sıralanır. Asıl iş bölmede yapılır.



bölümle(dizi, 0, 1), pivot **30** → indis 1'e yerleşti. Sol: [10], sağ: [—]. **Dengesiz bölme!**

Dengeli bölme

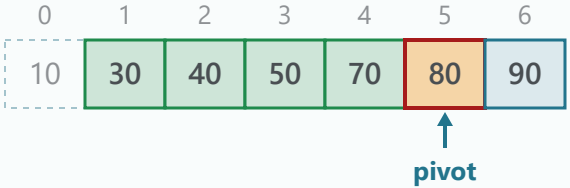
Pivot ortanca civarındaysa T(n) = 2T(n/2) + O(n) → **O(n log n)** (ortalama durum).

Dengesiz bölme

Sıralı girişte son öğe pivot: T(n) = T(n − 1) + O(n) → **O(n^2)**. Çare: rastgele pivot, üçün ortancası.

Hızlı Sıralama: Böl ve Fethet Bakışı

Böl: pivota göre bölümlenir, Θ(n). **Yönet:** iki parça özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** yok; parçalar yerinde sıralanır. Asıl iş bölmede yapılır.



bölümle(dizi, 5, 6), pivot **80** → indis 5'e yerleşti. Sol: [—], sağ: [90]. **Dengesiz bölme!**

Dengeli bölme

Pivot ortanca civarındaysa T(n) = 2T(n/2) + O(n) → **O(n log n)** (ortalama durum).

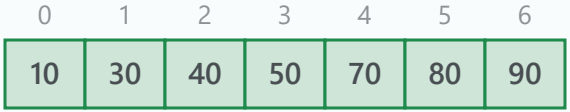
Dengesiz bölme

Sıralı girişte son öğe pivot: T(n) = T(n − 1) + O(n) → **O(n^2)**. Çare: rastgele pivot, üçün ortancası.

TEMEL ÖRNEKLER

Hızlı Sıralama: Böl ve Fethet Bakışı

Böl: pivota göre bölümlenir, Θ(n). **Yönet:** iki parça özyinelemeli sıralanır. **Birleştir:** yok; parçalar yerinde sıralanır. Asıl iş bölmede yapılır.



Sıralı: **[10 30 40 50 70 80 90]**. Birleştirme adımı yok; iş bölümlemede yapılır.

Adım 7 / 7

Dengeli bölme

Pivot ortanca civarındaysa T(n) = 2T(n/2) + O(n) → **O(n log n)** (ortalama durum).

Dengesiz bölme

Sıralı girişte son öğe pivot: T(n) = T(n − 1) + O(n) → **O(n^2)**. Çare: rastgele pivot, üçün ortancası.

Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶ 3   long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
5   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `us(3, 13)`
- `main()`

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).

n=13 → n=6 → n=3 → n=1 → n=0

$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

us(3, 13) çağrıldı → önce **us(3, 6)** hesaplanmalı (n/2 = 6).

Adım 1 / 9

DEĞİŞKENLER

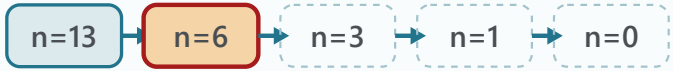
x = **3** | n = **13** | y = **?**

Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶ 3   long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
5   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `us(3, 6)`
- `us(3, 13)`
- `main()`



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

us(3, 6) çağrıldı → önce **us(3, 3)** hesaplanmalı (n/2 = 3).

Adım 2 / 9

DEĞİŞKENLER

x = **3** | n = **6** | y = **?**

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).

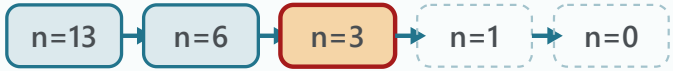
Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶  long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
5   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **us(3, 3)**
- us(3, 6)
- us(3, 13)
- main()

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

us(3, 3) çağrıldı → önce **us(3, 1)** hesaplanmalı (n/2 = 1).

Adım 3 / 9

DEĞİŞKENLER

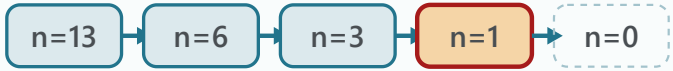
x = **3** | n = **3** | y = **?**

Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶ 3   long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
5   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **us(3, 1)**
- us(3, 3)
- us(3, 6)
- us(3, 13)
- main()



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

us(3, 1) çağrıldı → önce **us(3, 0)** hesaplanmalı (n/2 = 0).

DEĞİŞKENLER

x = **3** | n = **1** | y = **?**

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).

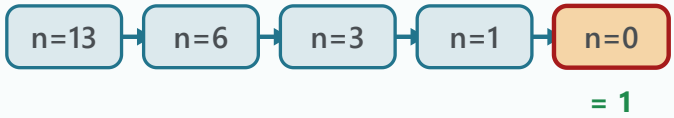
Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
▶   if (n == 0) return 1;          // taban
3   long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
5   return x * y * y;             // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `us(3, 0)`
- `us(3, 1)`
- `us(3, 3)`
- `us(3, 6)`
- `us(3, 13)`
- `main()`

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

n = 0 → **taban durumu**: $3^0 = 1$ döner.

Adım 5 / 9

DEĞİŞKENLER

`x = 3` `n = 0` `y = –`

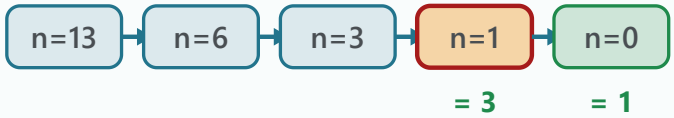
Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶   long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
▶   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **us(3, 1)**
- us(3, 3)
- us(3, 6)
- us(3, 13)
- main()

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

us(3, 1): y = 1; 1 tek → x·y·y = 3·1·1 = **3**.

Adım 6 / 9

DEĞİŞKENLER

x = **3** n = **1** y = **1**

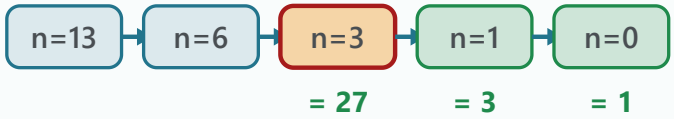
Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶   long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
▶   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- us(3, 3)
- us(3, 6)
- us(3, 13)
- main()

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

us(3, 3): y = 3; 3 tek → x·y·y = 3·3·3 = **27**.

Adım 7 / 9

DEĞİŞKENLER

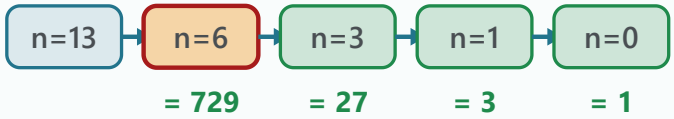
x = 3 | n = 3 | y = 3

Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶   long y = us(x, n / 2);
▶   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
5   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **us(3, 6)**
- us(3, 13)
- main()



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

us(3, 6): y = 27; 6 çift → y·y = 27·27 = **729**.

Adım 8 / 9

DEĞİŞKENLER

x = **3** n = **6** y = **27**

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).

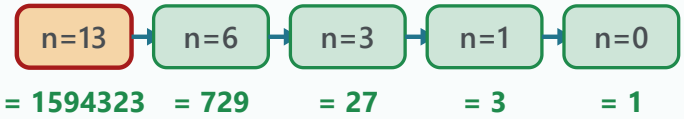
Hızlı Üs Alma: 3^{13} İzleme

```
1 long us(long x, int n) {
2   if (n == 0) return 1;          // taban
▶   long y = us(x, n / 2);
4   if (n % 2 == 0) return y * y; // çift
▶   return x * y * y;              // tek
6 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `us(3, 13)`
- `main()`

Saf yöntem 12, bu yöntem 7 çarpım; n = 10^6'da 999.999'a karşı 27 → **O(log n)**: T(n) = T(n/2) + O(1).



$3^{13} = 3\cdot(3^6)^2$; $3^6 = (3^3)^2$; $3^3 = 3\cdot(3^1)^2$

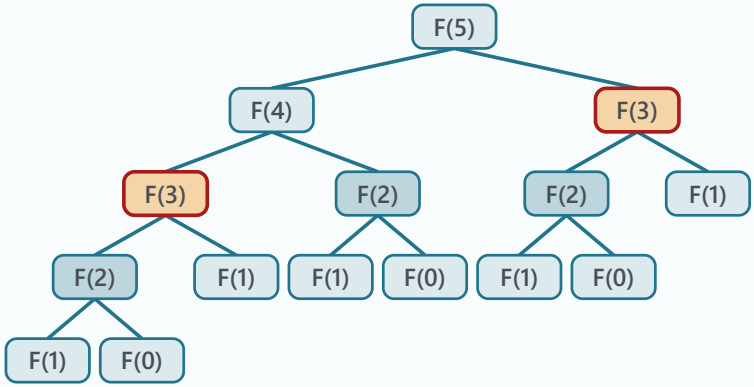
us(3, 13): y = 729; 13 tek → x·y·y = 3·729·729 = **1594323**.

Adım 9 / 9

DEĞİŞKENLER

x = **3** | n = **13** | y = **729**

Ne Zaman Uygun Değil? Örtüşen Alt Problemler



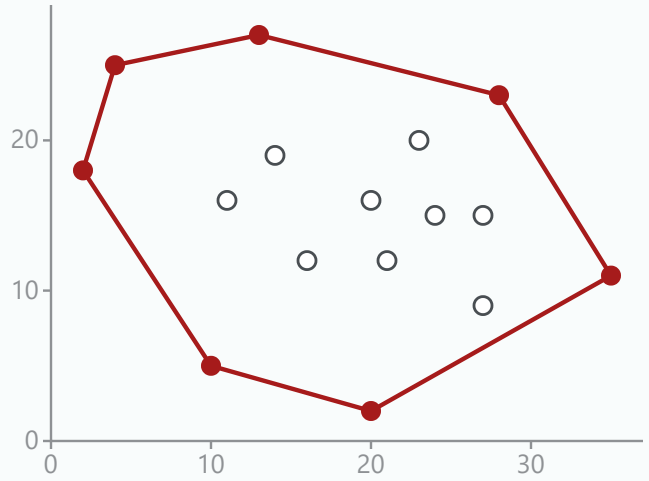

```
long fib(int n) {
  if (n < 2) return n;
  return fib(n - 1) + fib(n - 2);
}
```

- F(5) için **15 çağrı**: F(3) 2 kez, F(2) 3 kez hesaplanır.
- Alt problemler **bağımsız değil**, örtüşüyor → $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1) =$ **$O(\varphi^n)$** $\approx O(1{,}618^n)$.
- Çözüm: sonuçlar saklanır → **dinamik programlama**, O(n).

Fibonacci özyinelemesi böl ve fethet biçiminde yazılabilir; sonuç doğrudur, ama bu **kötü** bir örnektir: böl ve fethet, alt problemler birbirinden bağımsız olduğunda verimlidir.

Dışbükey Örtü (Convex Hull)

- Düzlemde n noktalı bir küme S verilsin. S'nin **dışbükey örtüsü**, S'yi içeren **en küçük dışbükey çokgendir**.
- Noktalara çivi çakılıp etraflarına bir **lastik bant** geçirildiğinde bandın aldığı şekil örtüdür.
- Örtünün köşeleri S'nin noktalarıdır; çıktı bu köşelerin (saat yönünün tersine) sıralı listesidir.
- Dışbükey: içindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası tamamen çokgenin içindedir.

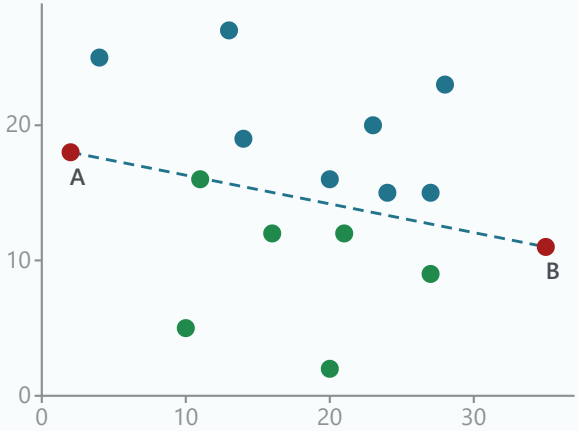


Kullanım: çarpışma algılama (oyunlar, robotik), coğrafi bilgi sistemleri, görüntü işlemede şekil analizi, en uzak nokta çifti, kümeleme.

DIŞBÜKEY ÖRTÜ

Quickhull Algoritması

1. x'i en küçük (A) ve en büyük (B) noktalar bulunur; ikisi de örtüdedir.
2. AB doğrusu noktaları **iki alt kümeye** ayırır: doğrunun üstü (solu) ve altı (sağı).
3. Bir alt kümede AB'ye **en uzak** C noktası bulunur; C örtüdedir.
4. ACB üçgeninin **içindeki noktalar elenir**: örtüde olamazlar.
5. AC'nin ve CB'nin dışında kalanlar için **özyineleme** yapılır.
6. Hiç nokta kalmayınca durulur; bulunan noktalar örtüyü oluşturur.



Adım 1–2: en soldaki A ve en sağdaki B örtüdedir; AB doğrusu noktaları **iki kümeye** ayırır (üst / alt).

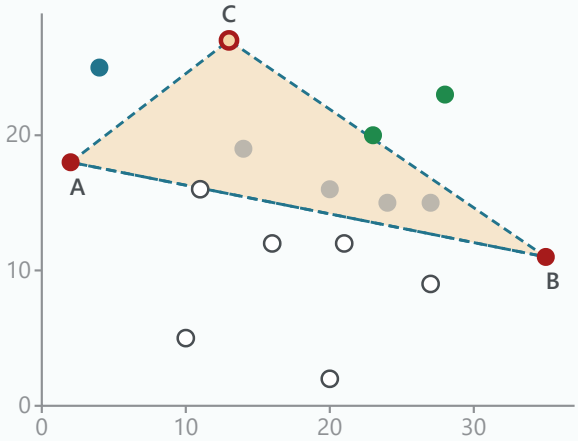
Adım 1 / 3

Hızlı sıralamaya benzer (adı da buradan): "pivot" en uzak nokta, bölümleme üçgenin iki kenarına göre yapılır.

DIŞBÜKEY ÖRTÜ

Quickhull Algoritması

1. x'i en küçük (A) ve en büyük (B) noktalar bulunur; ikisi de örtüdedir.
2. AB doğrusu noktaları **iki alt kümeye** ayırır: doğrunun üstü (solu) ve altı (sağı).
3. Bir alt kümede AB'ye **en uzak** C noktası bulunur; C örtüdedir.
4. ACB üçgeninin **içindeki noktalar elenir**: örtüde olamazlar.
5. AC'nin ve CB'nin dışında kalanlar için **özyineleme** yapılır.
6. Hiç nokta kalmayınca durulur; bulunan noktalar örtüyü oluşturur.



Adım 3–5: üst kümede AB'ye **en uzak** C (13,27) örtüdedir. ACB **üçgeninin içindeki 4 nokta elenir**; AC ve CB dışında kalanlarla özyineleme.

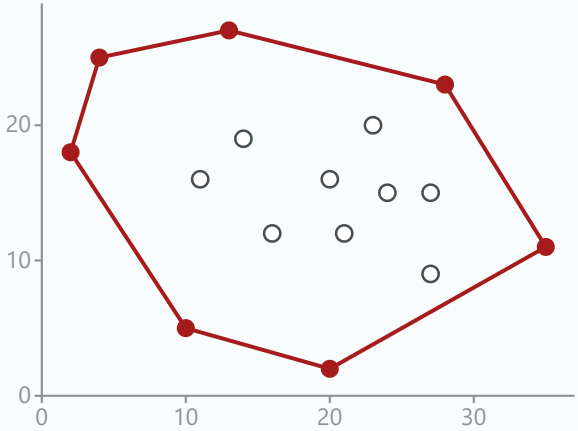
Adım 2 / 3

Hızlı sıralamaya benzer (adı da buradan): "pivot" en uzak nokta, bölümleme üçgenin iki kenarına göre yapılır.

DIŞBÜKEY ÖRTÜ

Quickhull Algoritması

1. x'i en küçük (A) ve en büyük (B) noktalar bulunur; ikisi de örtüdedir.
2. AB doğrusu noktaları **iki alt kümeye** ayırır: doğrunun üstü (solu) ve altı (sağı).
3. Bir alt kümede AB'ye **en uzak** C noktası bulunur; C örtüdedir.
4. ACB üçgeninin **içindeki noktalar elenir**: örtüde olamazlar.
5. AC'nin ve CB'nin dışında kalanlar için **özyineleme** yapılır.
6. Hiç nokta kalmayınca durulur; bulunan noktalar örtüyü oluşturur.



Adım 6: dışarıda nokta kalmayana dek özyineleme → **7 köşeli örtü**.

Adım 3 / 3

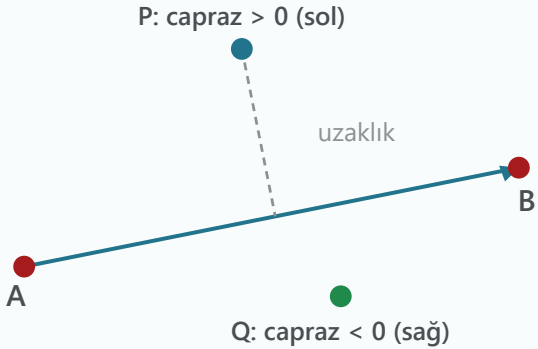
Hızlı sıralamaya benzer (adı da buradan): "pivot" en uzak nokta, bölümleme üçgenin iki kenarına göre yapılır.

Geometri: Yönelim Testi ve Uzaklık

Quickhull yalnızca **tam sayı** çarpımıyla çalışır; açı, karekök, bölme gerekmez:

```
long capraz(Nokta A, Nokta B, Nokta P) {
  return (long)(B.x - A.x) * (P.y - A.y)
       - (long)(B.y - A.y) * (P.x - A.x);
}
```

- **capraz > 0**: P, A→B'nin solunda; **< 0**: sağında; **= 0**: aynı doğruda.
- |capraz| = 2 × (ABP üçgeninin alanı) = |AB| × uzaklık. |AB| sabit olduğundan **en uzak nokta = en büyük capraz**.



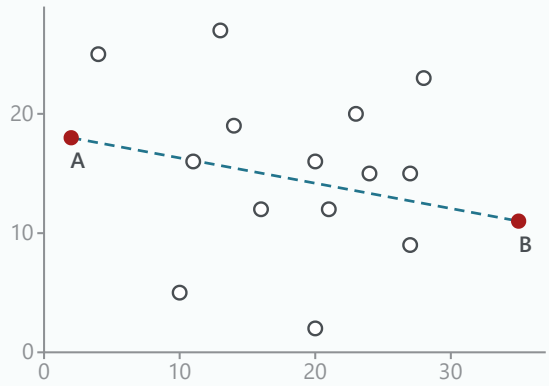
Örnek: A = (2,18), B = (35,11). C = (13,27) için capraz = 33·9 − (−7)·11 = **374**; (28,23) için 33·5 + 7·26 = **347**. En büyük değer C'de → C en uzak nokta.

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
▶    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
▶    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```

ÇAĞRI YIĞINI

`quickHull(P)`



En sol A = (2,18), en sağ B = (35,11) örtüye eklenir.

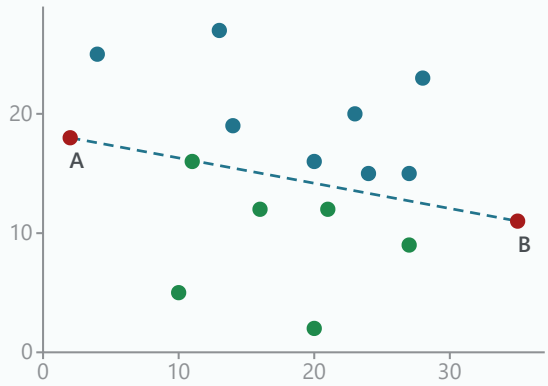
Adım 1 / 15

DEĞİŞKENLER

`A = (2,18)` `B = (35,11)` `|ortu| = 2`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
▶    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



AB'nin solunda (üst) **8**, sağında (alt) **6** nokta. Önce üst küme.

ÇAĞRI YIĞINI

- `bul(8 nk, (2,18)→(35,11))`
- `quickHull(P)`

Adım 2 / 15

DEĞİŞKENLER

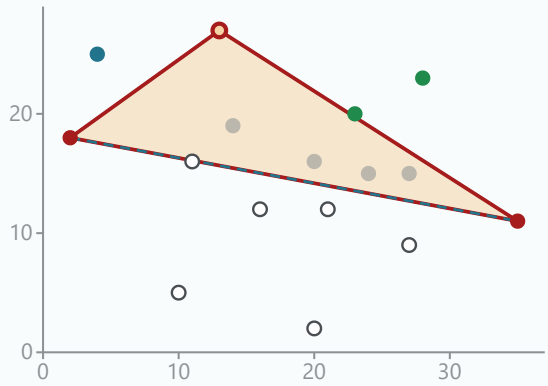
`A = (2,18)` `B = (35,11)` `|ortu| = 2`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;    // AB örtü kenarı
▶    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
▶    ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `bul(8 nk, (2,18)→(35,11))`
- `quickHull(P)`



|S| = 8: en uzak **C = (13,27)** örtüye girer. Üçgen içinde 4 nokta elenir; AC dışında 1, CB dışında 2 nokta.

Adım 3 / 15

DEĞİŞKENLER

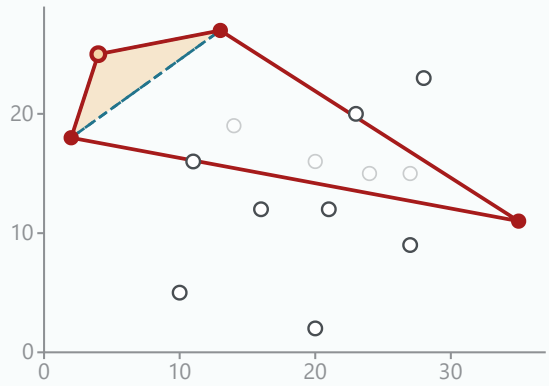
`A = (2,18)` `B = (35,11)` `C = (13,27)` `|S| = 8` `|ortu| = 3`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;    // AB örtü kenarı
▶    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
▶    ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **bul(1 nk, (2,18)→(13,27))**
- bul(8 nk, (2,18)→(35,11))
- quickHull(P)



|S| = 1: en uzak **C = (4,25)** örtüye girer. Üçgen içinde 0 nokta elenir; AC dışında 0, CB dışında 0 nokta.

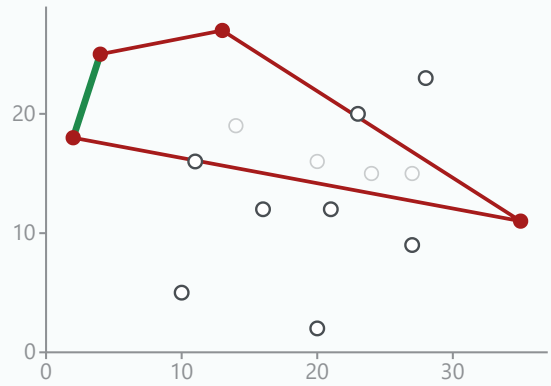
Adım 4 / 15

DEĞİŞKENLER

A = (2,18) | B = (13,27) | C = (4,25) | |S| = 1 | |ortu| = 4

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
▶    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



S boş → (2,18)–(4,25) bir **örtü kenarıdır**; geri dön.

ÇAĞRI YIĞINI

- **bul(0 nk, (2,18)→(4,25))**
- bul(1 nk, (2,18)→(13,27))
- bul(8 nk, (2,18)→(35,11))
- quickHull(P)

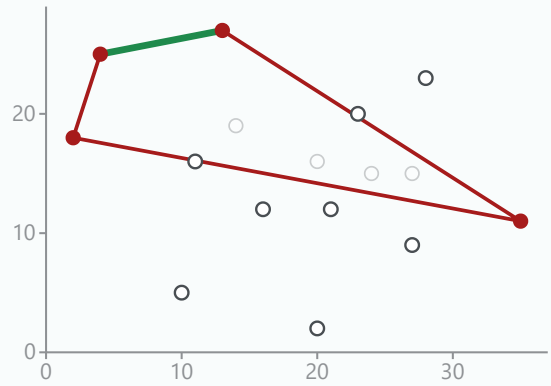
Adım 5 / 15

DEĞİŞKENLER

A = **(2,18)** B = **(4,25)** C = **–** |S| = **0** |ortu| = **4**

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
▶    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



S boş → (4,25)–(13,27) bir **örtü kenarıdır**; geri dön.

ÇAĞRI YIĞINI

- `bul(0 nk, (4,25)→(13,27))`
- `bul(1 nk, (2,18)→(13,27))`
- `bul(8 nk, (2,18)→(35,11))`
- `quickHull(P)`

Adım 6 / 15

DEĞİŞKENLER

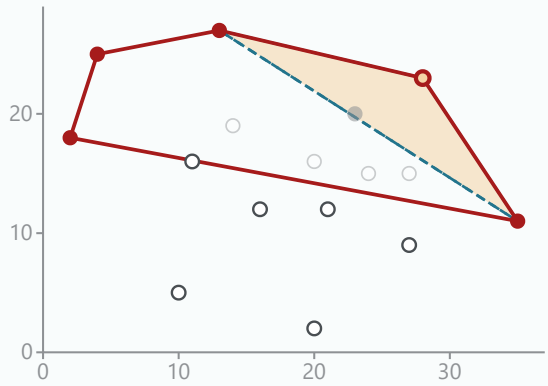
`A = (4,25)` `B = (13,27)` `C = –` `|S| = 0` `|ortu| = 4`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;    // AB örtü kenarı
▶    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
▶    ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```

ÇAĞRI YIĞINI

- `bul(2 nk, (13,27)→(35,11))`
- `bul(8 nk, (2,18)→(35,11))`
- `quickHull(P)`



|S| = 2: en uzak **C = (28,23)** örtüye girer. Üçgen içinde 1 nokta elenir; AC dışında 0, CB dışında 0 nokta.

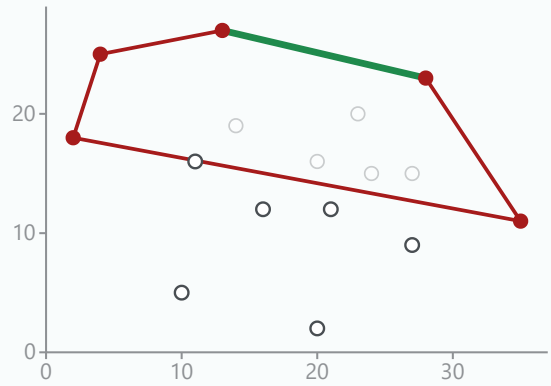
Adım 7 / 15

DEĞİŞKENLER

`A = (13,27)` `B = (35,11)` `C = (28,23)` `|S| = 2` `|ortu| = 5`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
▶    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



S boş → (13,27)–(28,23) bir **örtü kenarıdır**; geri dön.

ÇAĞRI YIĞINI

- **bul(0 nk, (13,27)→(28,23))**
- bul(2 nk, (13,27)→(35,11))
- bul(8 nk, (2,18)→(35,11))
- quickHull(P)

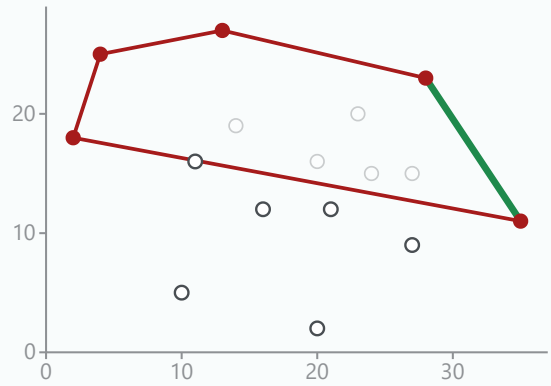
Adım 8 / 15

DEĞİŞKENLER

A = **(13,27)** B = **(28,23)** C = **–** |S| = **0** |ortu| = **5**

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
▶    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



S boş → (28,23)–(35,11) bir **örtü kenarıdır**; geri dön.

ÇAĞRI YIĞINI

- **bul(0 nk, (28,23)→(35,11))**
- bul(2 nk, (13,27)→(35,11))
- bul(8 nk, (2,18)→(35,11))
- quickHull(P)

Adım 9 / 15

DEĞİŞKENLER

A = **(28,23)** · B = **(35,11)** · C = **–** · |S| = **0** · |ortu| = **5**

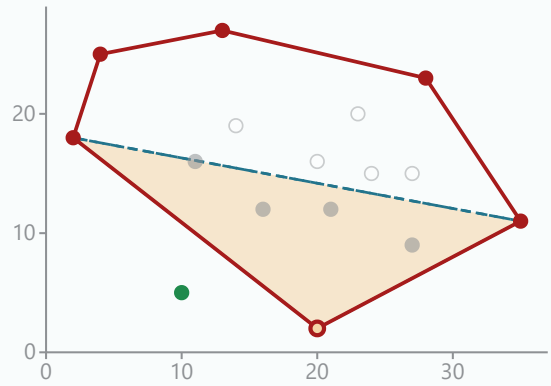
Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;    // AB örtü kenarı
▶    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
▶    ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```

ÇAĞRI YIĞINI

`bul(6 nk, (35,11)→(2,18))`

`quickHull(P)`



|S| = 6: en uzak **C = (20,2)** örtüye girer. Üçgen içinde 4 nokta elenir; AC dışında 0, CB dışında 1 nokta.

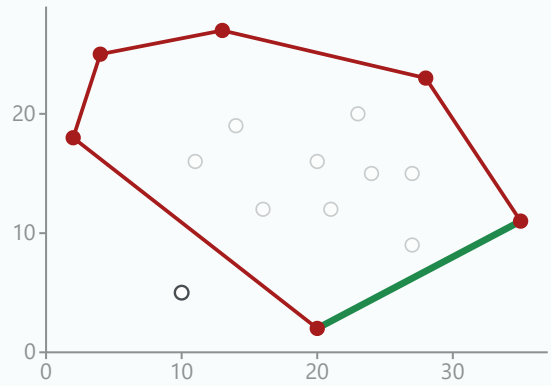
Adım 10 / 15

DEĞİŞKENLER

`A = (35,11)` `B = (2,18)` `C = (20,2)` `|S| = 6` `|ortu| = 6`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
▶    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



S boş → (35,11)–(20,2) bir **örtü kenarıdır**; geri dön.

ÇAĞRI YIĞINI

- `bul(0 nk, (35,11)→(20,2))`
- `bul(6 nk, (35,11)→(2,18))`
- `quickHull(P)`

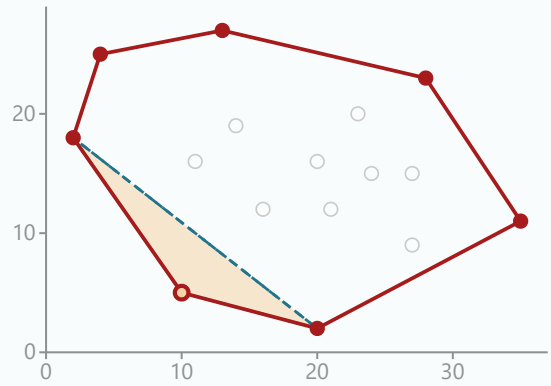
Adım 11 / 15

DEĞİŞKENLER

`A = (35,11)` `B = (20,2)` `C = –` `|S| = 0` `|ortu| = 6`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;    // AB örtü kenarı
▶    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
▶    ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



|S| = 1: en uzak **C = (10,5)** örtüye girer. Üçgen içinde 0 nokta elenir; AC dışında 0, CB dışında 0 nokta.

ÇAĞRI YIĞINI

- `bul(1 nk, (20,2)→(2,18))`
- `bul(6 nk, (35,11)→(2,18))`
- `quickHull(P)`

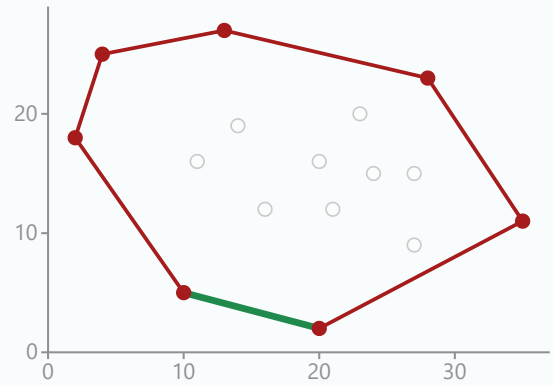
Adım 12 / 15

DEĞİŞKENLER

`A = (20,2)` `B = (2,18)` `C = (10,5)` `|S| = 1` `|ortu| = 7`

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
▶    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



S boş → (20,2)–(10,5) bir **örtü kenarıdır**; geri dön.

ÇAĞRI YIĞINI

- **bul(0 nk, (20,2)→(10,5))**
- bul(1 nk, (20,2)→(2,18))
- bul(6 nk, (35,11)→(2,18))
- quickHull(P)

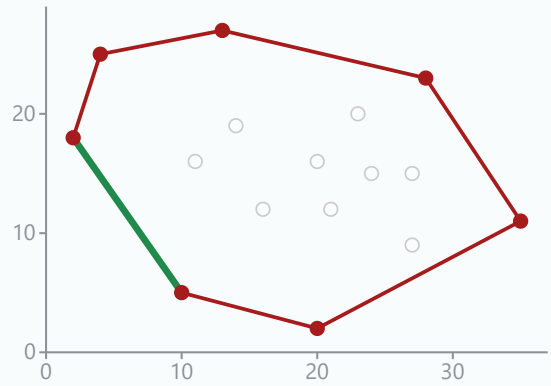
Adım 13 / 15

DEĞİŞKENLER

A = **(20,2)** B = **(10,5)** C = **–** |S| = **0** |ortu| = **7**

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
5    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
▶    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



S boş → (10,5)–(2,18) bir **örtü kenarıdır**; geri dön.

ÇAĞRI YIĞINI

- **bul(0 nk, (10,5)→(2,18))**
- bul(1 nk, (20,2)→(2,18))
- bul(6 nk, (35,11)→(2,18))
- quickHull(P)

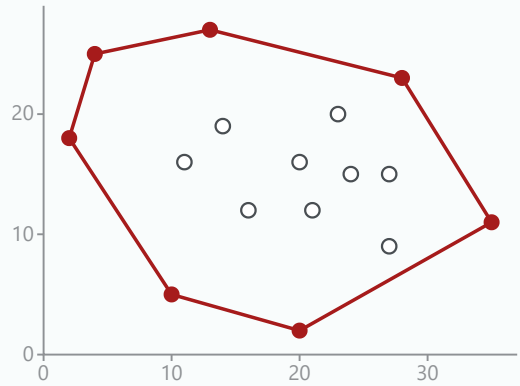
Adım 14 / 15

DEĞİŞKENLER

A = **(10,5)** · B = **(2,18)** · C = **–** · |S| = **0** · |ortu| = **7**

Quickhull: Kod İzleme

```
1  void quickHull(List<Nokta> P) {
2    Nokta A = enSol(P), B = enSag(P);
3    ortu.add(A); ortu.add(B);
4    bul(solda(P, A, B), A, B); // üst küme
▶    bul(solda(P, B, A), B, A); // alt küme
6  }
7  void bul(List<Nokta> S, Nokta A, Nokta B) {
8    if (S.isEmpty()) return;   // AB örtü kenarı
9    Nokta C = enUzak(S, A, B); // max capraz
10   ortu.add(C);
11   bul(solda(S, A, C), A, C); // AC'nin dışı
12   bul(solda(S, C, B), C, B); // CB'nin dışı
13 }  // ACB üçgeninin içi elenir
```



Bitti: **7 köşe** bulundu, 9 nokta elendi. Toplam 12 `bul` çağrısı.

ÇAĞRI YIĞINI

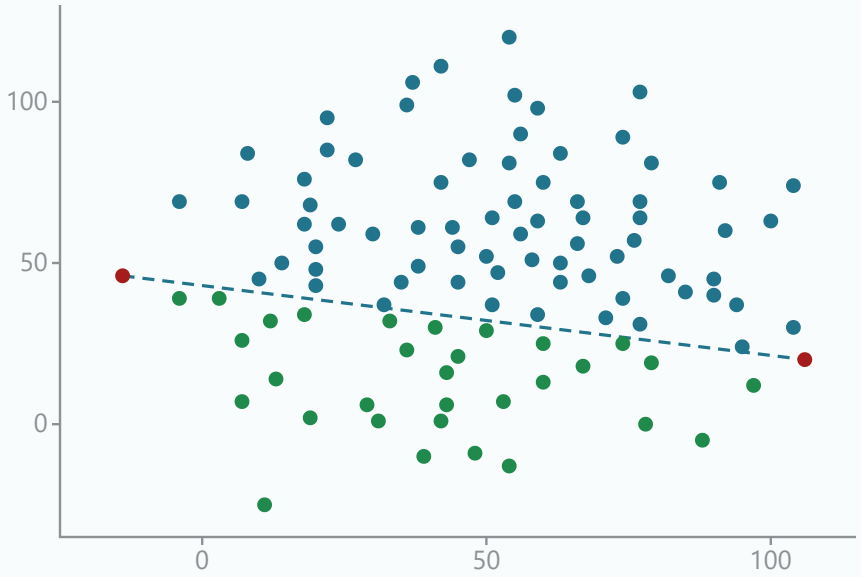
`quickHull(P)`

Adım 15 / 15

DEĞİŞKENLER

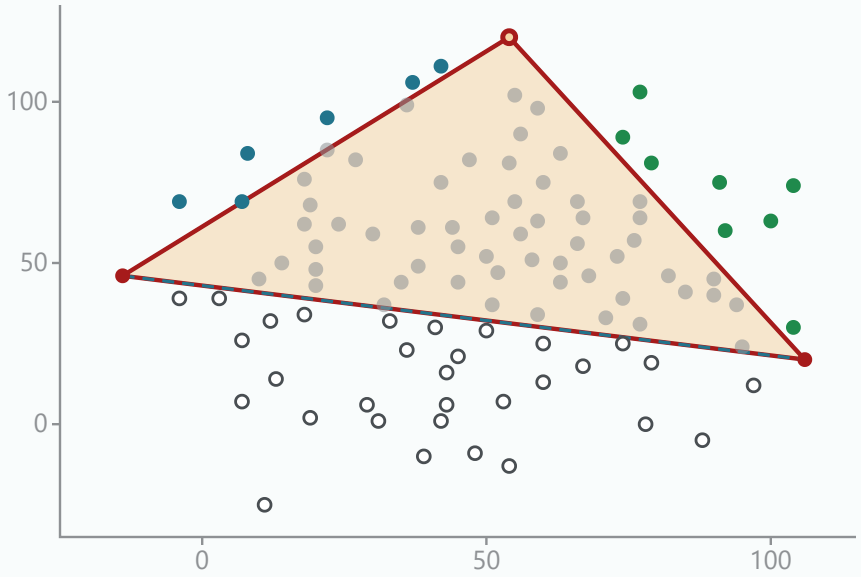
`A = (2,18)` `B = (35,11)` `C = –` `|S| = 0` `|ortu| = 7`

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



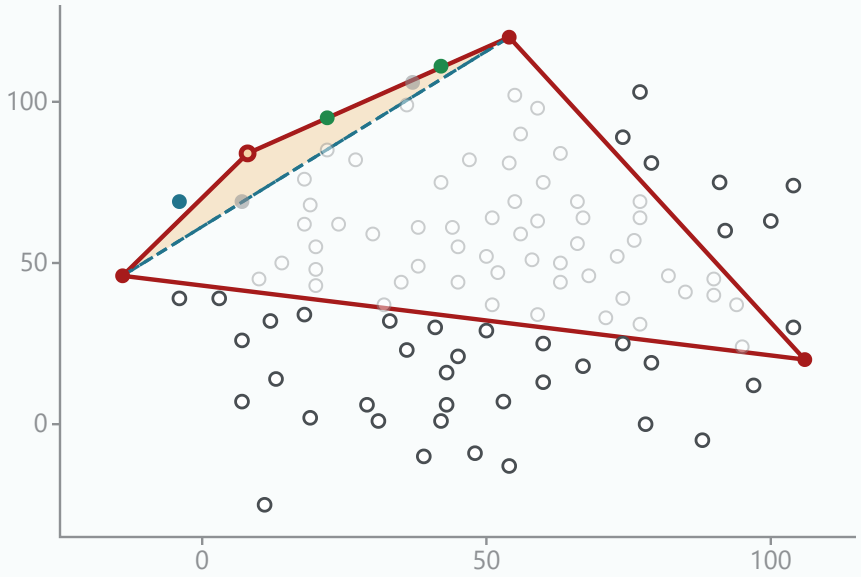
104 nokta. En sol (-14,46) ve en sağ (106,20) birleştirilir; üstte 71, altta 31 nokta.

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



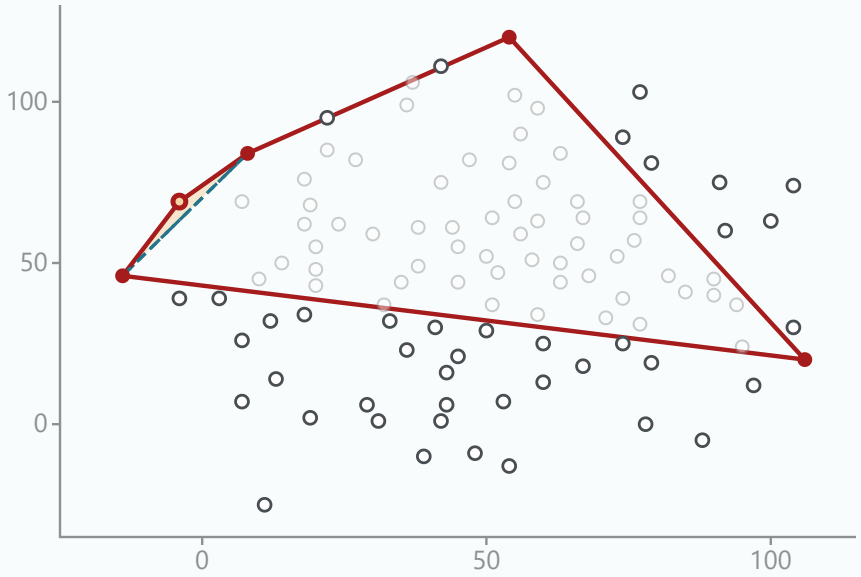
(-14,46)→(106,20) için en uzak: **(54,120)**; üçgen içindeki **56** nokta elendi. Aday kaldı: 45.

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



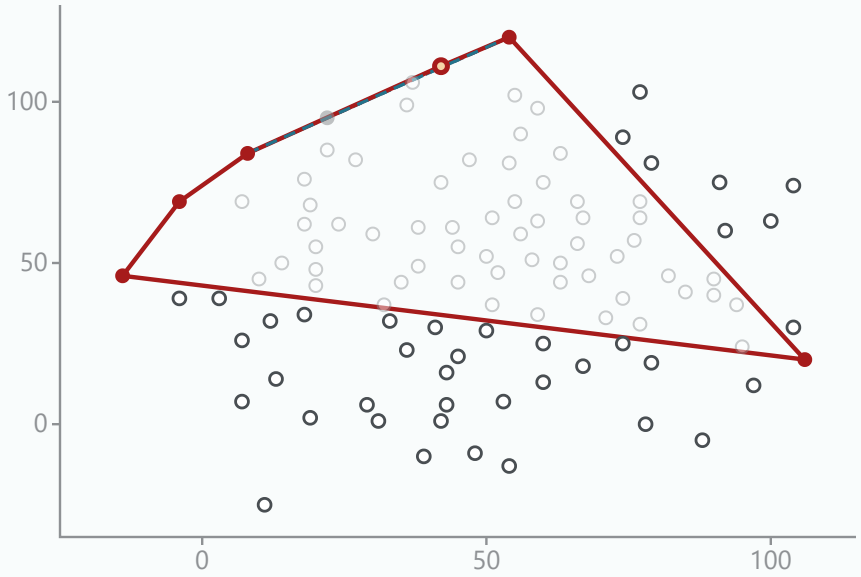
(-14,46)→(54,120) için en uzak: **(8,84)**; üçgen içindeki **2** nokta elendi. Aday kaldı: 42.

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



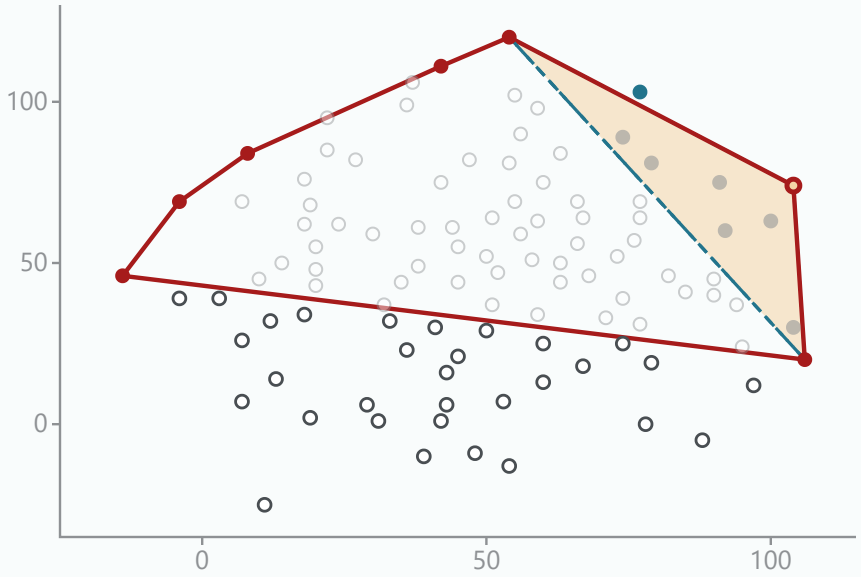
(-14,46)→(8,84) için en uzak: **(-4,69)**; üçgen içindeki **0** nokta elendi. Aday kaldı: 41.

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



(8,84)→(54,120) için en uzak: **(42,111)**; üçgen içindeki **1** nokta elendi. Aday kaldı: 39.

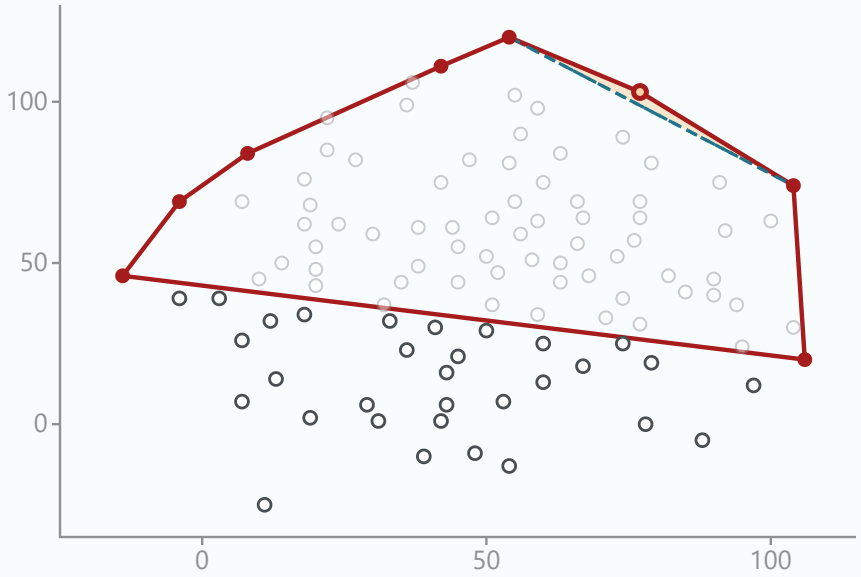
Quickhull: 104 Noktalı Örnek



(54,120)→(106,20) için en uzak: **(104,74)**; üçgen içindeki **6** nokta elendi. Aday kaldı: 32.

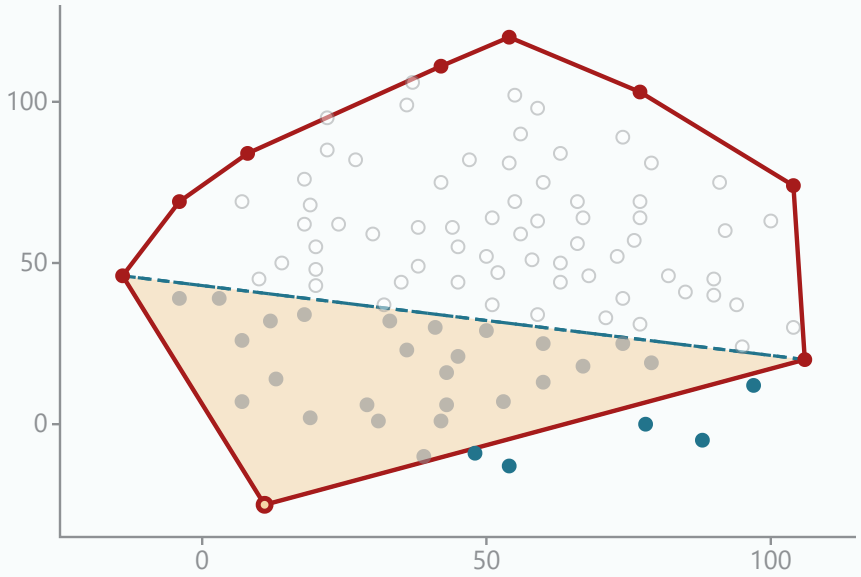
DIŞBÜKEY ÖRTÜ

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



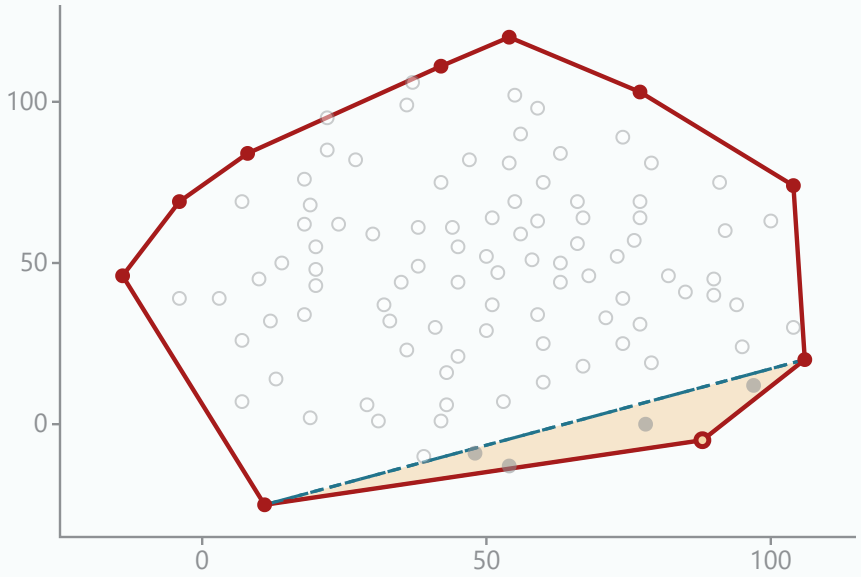
(54,120)→(104,74) için en uzak: **(77,103)**; üçgen içindeki **0** nokta elendi. Aday kaldı: 31.

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



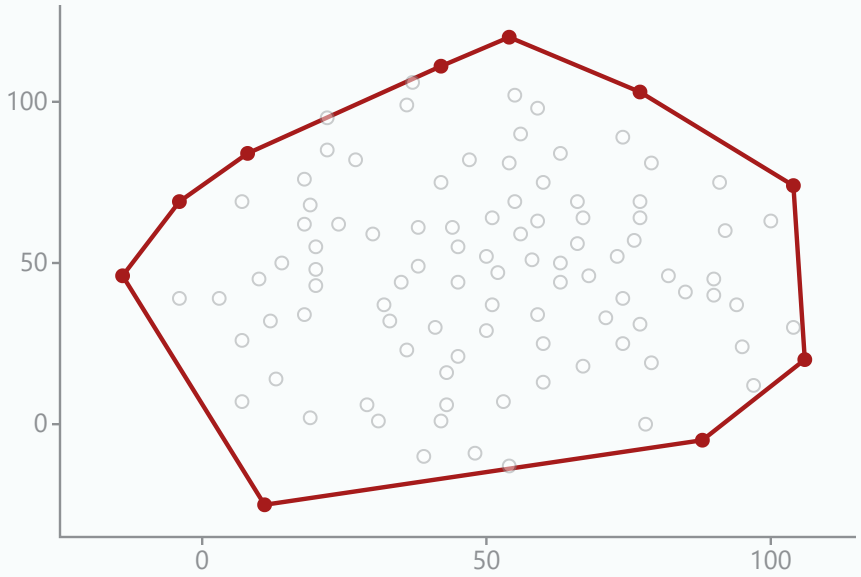
(106,20)→(-14,46) için en uzak: **(11,-25)**; üçgen içindeki **25** nokta elendi. Aday kaldı: 5.

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



(106,20)→(11,-25) için en uzak: **(88,-5)**; üçgen içindeki **4** nokta elendi. Aday kaldı: 0.

Quickhull: 104 Noktalı Örnek



Bitti: 104 noktanın örtüsü **10 köşe**. Her adımda noktaların çoğu elendiği için iş hızla azalır.

Quickhull Analizi ve Diğer Örtü Algoritmaları

- Her çağrı S'yi bir kez tarar (en uzak nokta + iki bölümleme): **O(|S|)**.
- $T(n) = T(n_1) + T(n_2) + O(n)$, $n_1 + n_2 \le n - 1$.
- **Ortalama** (dengeli bölmeler, çok nokta elenir): **O(n log n)**; rastgele düzgün dağılımda çoğu zaman daha da hızlı.
- **En kötü** durum: her adımda yalnızca bir nokta ayrılır → $T(n) = T(n-1) + O(n) =$ **$O(n^2)$**.
- Çıktıya duyarlı sınır: h köşeli örtü için O(n·h).

Algoritma	Süre
Kaba kuvvet (her kenar adayı)	$O(n^3)$
Jarvis yürüyüşü (gift wrapping)	O(n·h)
Graham taraması	O(n log n)
Andrew monoton zincir	O(n log n)
Quickhull	ort. O(n log n), en kötü $O(n^2)$
Chan	O(n log h)

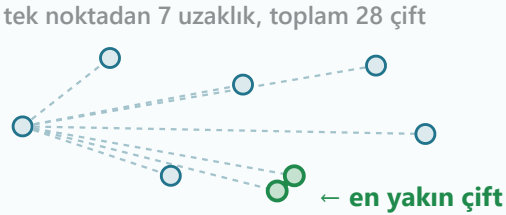
Alt sınır: örtü sıralamayı da çözebildiği için (noktalar $y = x^2$ parabolüne yerleştirilir) karşılaştırmalı modelde **Ω(n log n)** zaman gerekir.

En Yakın Nokta Çifti (Closest Pair)

Problem: düzlemdeki n nokta arasından **Öklid uzaklığı** $d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$ en küçük olan çifti bulmak.

```
double kabaKuvvet(List<Nokta> p) {
  double enAz = Double.MAX_VALUE;
  for (int i = 0; i < p.size(); i++)
    for (int j = i + 1; j < p.size(); j++)
      enAz = Math.min(enAz, mesafe(p.get(i), p.get(j)));
  return enAz;
}
```

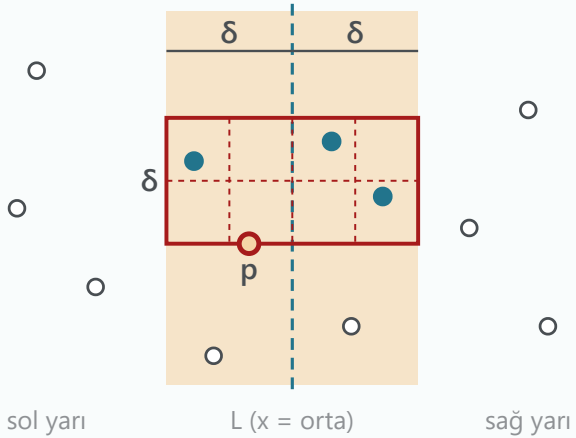
- **Kaba kuvvet:** $n(n - 1)/2$ çift → **$O(n^2)$**. $n = 10^6$ için $\approx 5 \cdot 10^{11}$ uzaklık.
- **Tek boyutta** kolay: sırala, yalnızca komşuları karşılaştır → $O(n \log n)$.
- İki boyutta x'e göre sıralı komşular yetmez; **böl ve fethet** ile $O(n \log n)$ mümkün.



Uygulamalar: hava trafiği kontrolünde en yakın iki uçak, kümeleme, çarpışma algılama, coğrafi verilerde yakın tesisler.

Böl ve Fethet: Orta Şerit

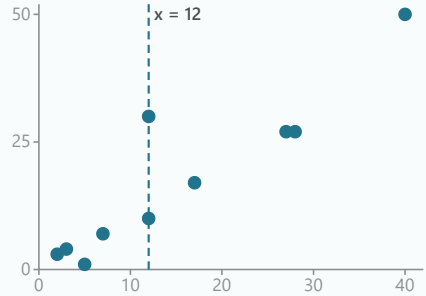
1. Noktalar bir kez **x'e** ve bir kez **y'ye** göre sıralanır.
2. **Böl:** ortadaki noktanın x'inden geçen L doğrusu ile iki yarı.
3. **Yönet:** iki yarıda özyinelemeyle δ_L ve δ_R; $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$.
4. **Birleştir:** daha yakın bir çift varsa L'yi keser → yalnızca $|x - L| < \delta$ olan **şerit** noktalarına bakılır.
5. Şerit y sırasıyla taranır; her nokta yalnızca y farkı δ'dan küçük olan sonrakilerle karşılaştırılır.



Neden en çok 7? p'nin üstündeki $\delta \times 2\delta$ dikdörtgen, kenarı $\delta/2$ olan 8 kareye bölünür. Bir karedeki iki nokta aynı yarıda olur ve aralarındaki uzaklık $< \delta$ olurdu; bu imkânsız → her karede ≤ 1 nokta → p en çok **7** noktayla karşılaştırılır.

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
 1 double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
 2   int n = X.size(), orta = n / 2;
 3   if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
 4   Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
 5   double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
 6   double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
 7   double d = Math.min(dSol, dSag);
 8   List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
 9   for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```



n = 10 > 3 → orta = 5, m = (12,10). Sol: 5, sağ: 5 nokta.

Adım 1 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

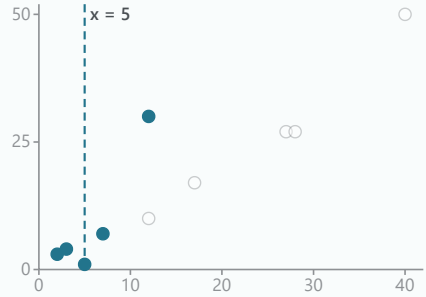
`n = 10` `m = (12,10)` `dSol = ?` `dSag = ?` `d = ?`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
 1 double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
 2   int n = X.size(), orta = n / 2;
 3   if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
 4   Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
 5   double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
 6   double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
 7   double d = Math.min(dSol, dSag);
 8   List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
 9   for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enYakin(X[0..4])**
- enYakin(X[0..9])
- main()



n = 5 > 3 → orta = 2, m = (5,1). Sol: 2, sağ: 3 nokta.

Adım 2 / 13

DEĞİŞKENLER

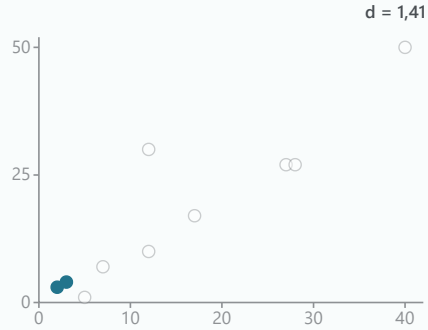
`n = 5` `m = (5,1)` `dSol = ?` `dSag = ?` `d = ?`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
1  double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
2    int n = X.size(), orta = n / 2;
▶    if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
4    Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
5    double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
6    double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
7    double d = Math.min(dSol, dSag);
8    List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
9    for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enYakin(X[0..1])**
- enYakin(X[0..4])
- enYakin(X[0..9])
- main()



n = 2 ≤ 3 → kaba kuvvet: (2,3), (3,4). En yakın (2,3)–(3,4), d = **1,41**.

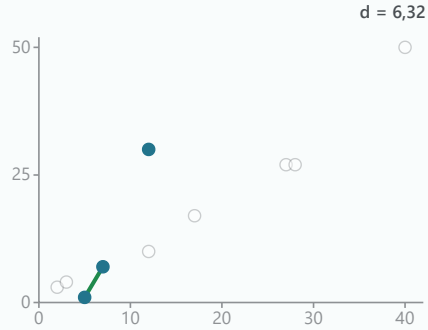
Adım 3 / 13

DEĞİŞKENLER

`n = 2` `m = –` `dSol = –` `dSag = –` `d = 1,41`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
1  double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
2    int n = X.size(), orta = n / 2;
▶    if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
4    Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
5    double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
6    double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
7    double d = Math.min(dSol, dSag);
8    List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
9    for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```



n = 3 ≤ 3 → kaba kuvvet: (5,1), (7,7), (12,30). En yakın (5,1)–(7,7), d = **6,32**.

Adım 4 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

- `enYakin(X[2..4])`
- `enYakin(X[0..4])`
- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

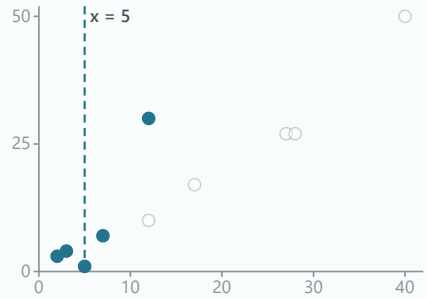
`n = 3` `m = –` `dSol = –` `dSag = –` `d = 6,32`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
1  double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
2    int n = X.size(), orta = n / 2;
3    if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
4    Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
5    double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
6    double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
▶    double d = Math.min(dSol, dSag);
8    List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
9    for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```

ÇAĞRI YIĞINI

- **enYakin(X[0..4])**
- enYakin(X[0..9])
- main()



İki yarı döndü: dSol = 1,41, dSag = 6,32 → d = **1,41**.

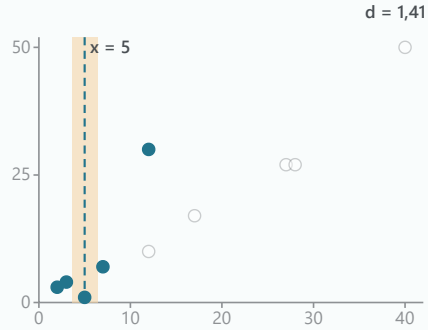
Adım 5 / 13

DEĞİŞKENLER

`n = 5` `m = (5,1)` `dSol = 1,41` `dSag = 6,32` `d = 1,41`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
 1 double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
 2   int n = X.size(), orta = n / 2;
 3   if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
 4   Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
 5   double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
 6   double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
 7   double d = Math.min(dSol, dSag);
 8   List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
 9   for (Nokta p : Y)                   // y sırası
▶      if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
▶        d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
▶    return d;
18 }
```



Şerit |x − 5| < 1,41: [(5,1)]; tek nokta → karşılaştırma yok. Dönüş: **1,41**.

Adım 6 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

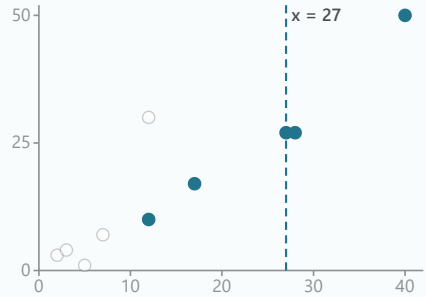
- `enYakin(X[0..4])`
- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

`n = 5` `m = (5,1)` `dSol = 1,41` `dSag = 6,32` `d = 1,41` `|serit| = 1`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
 1 double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
 2   int n = X.size(), orta = n / 2;
 3   if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
 4   Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
 5   double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
 6   double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
 7   double d = Math.min(dSol, dSag);
 8   List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
 9   for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```



n = 5 > 3 → orta = 2, m = (27,27). Sol: 2, sağ: 3 nokta.

Adım 7 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

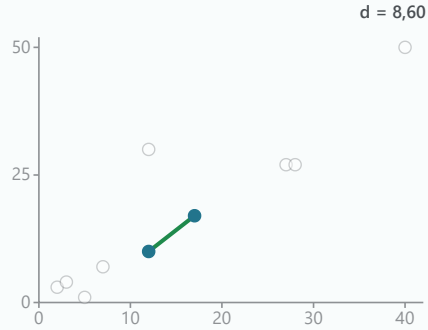
- `enYakin(X[5..9])`
- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

`n = 5` `m = (27,27)` `dSol = ?` `dSag = ?` `d = ?`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
1  double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
2    int n = X.size(), orta = n / 2;
▶    if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
4    Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
5    double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
6    double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
7    double d = Math.min(dSol, dSag);
8    List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
9    for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```



n = 2 ≤ 3 → kaba kuvvet: (12,10), (17,17). En yakın (12,10)–(17,17), d = **8,60**.

Adım 8 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

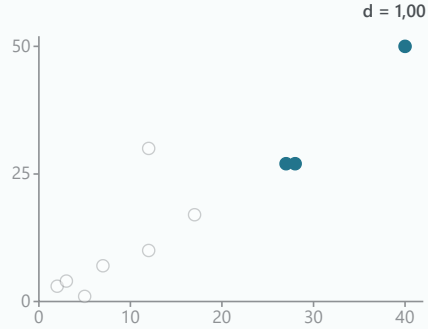
- **enYakin(X[5..6])**
- enYakin(X[5..9])
- enYakin(X[0..9])
- main()

DEĞİŞKENLER

`n = 2` `m = –` `dSol = –` `dSag = –` `d = 8,60`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
1  double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
2    int n = X.size(), orta = n / 2;
▶    if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
4    Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
5    double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
6    double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
7    double d = Math.min(dSol, dSag);
8    List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
9    for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```



n = 3 ≤ 3 → kaba kuvvet: (27,27), (28,27), (40,50). En yakın (27,27)–(28,27), d = **1,00**.

Adım 9 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

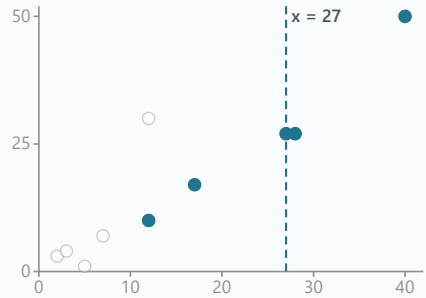
- `enYakin(X[7..9])`
- `enYakin(X[5..9])`
- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

`n = 3` `m = –` `dSol = –` `dSag = –` `d = 1,00`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
1  double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
2    int n = X.size(), orta = n / 2;
3    if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
4    Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
5    double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
6    double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
▶    double d = Math.min(dSol, dSag);
8    List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
9    for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```



İki yarı döndü: dSol = 8,60, dSag = 1,00 → d = **1,00**.

Adım 10 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

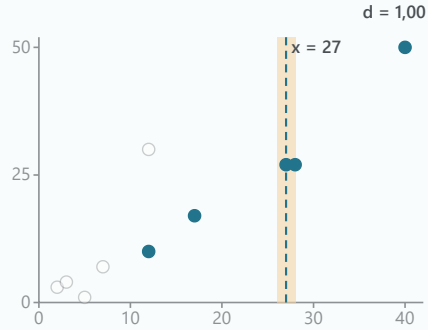
- `enYakin(X[5..9])`
- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

`n = 5` `m = (27,27)` `dSol = 8,60` `dSag = 1,00` `d = 1,00`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
 1 double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
 2   int n = X.size(), orta = n / 2;
 3   if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
 4   Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
 5   double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
 6   double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
 7   double d = Math.min(dSol, dSag);
 8   List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
 9   for (Nokta p : Y)                   // y sırası
▶      if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
▶        d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
▶    return d;
18 }
```



Şerit |x − 27| < 1,00: [(27,27)]; tek nokta → karşılaştırma yok. Dönüş: **1,00**.

Adım 11 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

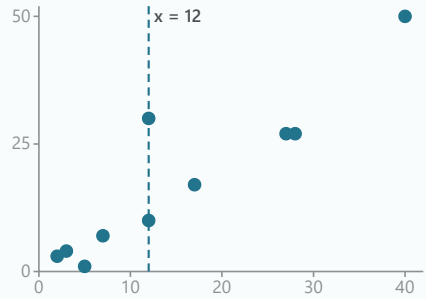
- `enYakin(X[5..9])`
- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

`n = 5` `m = (27,27)` `dSol = 8,60` `dSag = 1,00` `d = 1,00` `|serit| = 1`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
1  double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
2    int n = X.size(), orta = n / 2;
3    if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
4    Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
5    double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
6    double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
▶    double d = Math.min(dSol, dSag);
8    List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
9    for (Nokta p : Y)                   // y sırası
10     if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
15       d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
17   return d;
18 }
```



İki yarı döndü: dSol = 1,41, dSag = 1,00 → d = **1,00**.

Adım 12 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

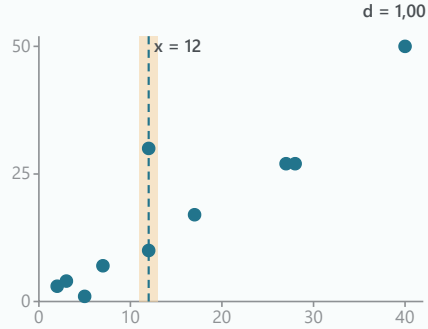
- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

`n = 10` `m = (12,10)` `dSol = 1,41` `dSag = 1,00` `d = 1,00`

En Yakın Çift: Kod İzleme

```
 1 double enYakin(List<Nokta> X, List<Nokta> Y) {
 2   int n = X.size(), orta = n / 2;
 3   if (n <= 3) return kabaKuvvet(X);
 4   Nokta m = X.get(orta); // Ysol/Ysag: Y'nin yarıları
 5   double dSol = enYakin(X.subList(0, orta), Ysol);
 6   double dSag = enYakin(X.subList(orta, n), Ysag);
 7   double d = Math.min(dSol, dSag);
 8   List<Nokta> s = new ArrayList<>();  // şerit
 9   for (Nokta p : Y)                   // y sırası
▶      if (Math.abs(p.x - m.x) < d) s.add(p);
11   for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
12     Nokta p = s.get(i);
13     for (int j = i + 1; j < s.size()
14          && s.get(j).y - p.y < d; j++)
▶        d = Math.min(d, mesafe(p, s.get(j)));
16   }
▶    return d;
18 }
```



Şerit |x − 12| < 1,00: [(12,10), (12,30)]; y farkı d'den büyük → **hiç karşılaştırma yok**. Dönüş: **1,00**.

Adım 13 / 13

ÇAĞRI YIĞINI

- `enYakin(X[0..9])`
- `main()`

DEĞİŞKENLER

`n = 10` `m = (12,10)` `dSol = 1,41` `dSag = 1,00` `d = 1,00` `|serit| = 2`

En Yakın Çift: Analiz

Adım	Maliyet	Not
x ve y'ye göre ön sıralama	O(n log n)	yalnızca bir kez, özyinelemeden önce
Bölme (X ikiye, Y'yi sırayı koruyarak Ysol/Ysag'ye)	O(n)	yeniden sıralama yok
Şeridi kurma	O(n)	Y zaten y'ye göre sıralı
Şeridi tarama	O(7n) = O(n)	her nokta ≤ 7 komşu
Toplam	**O(n log n)**	T(n) = 2T(n/2) + O(n)

Yaygın tuzak

Şeridi her çağrıda yeniden **sıralamak**: T(n) = 2T(n/2) + O(n log n) = **$O(n \log^2 n)$**.

Örnekte

10 noktanın en yakın çifti **(27,27)–(28,27)**, d = 1,00. Kaba kuvvet 45 uzaklık hesaplardı.

KARATSUBA ÇARPIMI

Karatsuba: 4 Çarpım Yerine 3

n basamaklı x, y sayıları m = ⌊n/2⌋ noktasından bölünür: **$x = a \cdot 10^m + b$**, **$y = c \cdot 10^m + d$**.

Saf böl ve fethet

$x \cdot y = ac \cdot 10^{2m} + (ad + bc) \cdot 10^m + bd$

4 çarpım: ac, ad, bc, bd

$T(n) = 4T(n/2) + O(n) = \mathbf{O(n^2)}$ → kazanç yok!

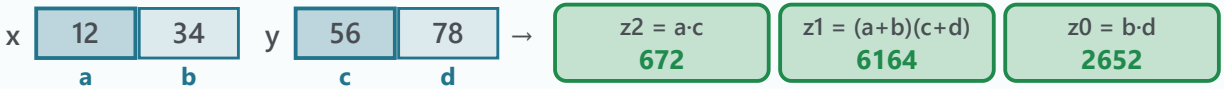
Karatsuba (1962)

$(a + b)(c + d) = ac + \mathbf{(ad + bc)} + bd$

$\Rightarrow ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$

3 çarpım: z2 = ac, z0 = bd, z1 = (a + b)(c + d)

$T(n) = 3T(n/2) + O(n) = \mathbf{O(n^{1,585})}$



Örnek: 1234 · 5678 ($m = 2$, $10^m = 100$)	
a = 12, b = 34, c = 56, d = 78	z2 = 12·56 = **672** · z0 = 34·78 = **2652**
z1 = (12 + 34)(56 + 78) = 46·134 = **6164**	z1 − z2 − z0 = 6164 − 672 − 2652 = **2840** (= ad + bc)
$672 \cdot 10^4 + 2840 \cdot 10^2 + 2652 = 6.720.000 + 284.000 + 2652 =$ **7.006.652** ✓	

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme

1234·5678

karatsuba(1234, 5678): n = 4, p = 100 → a = 12, b = 34, c = 56, d = 78. Üç çağrı: (34, 78), (46, 134), (12, 56).

Adım 1 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
▶    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
▶    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
▶    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
▶    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

DEĞİŞKENLER

x = 1234 | y = 5678 | n = 4 | p = 100 | a = 12 | b = 34 | c = 56 | d = 78

ÇAĞRI YIĞINI

karatsuba(1234, 5678)

main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



karatsuba(34, 78): n = 2, p = 10 → a = 3, b = 4, c = 7, d = 8. Üç çağrı: (4, 8), (7, 15), (3, 7).

Adım 2 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
▶    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
▶    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
▶    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
▶    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

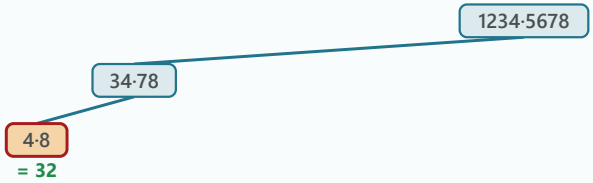
DEĞİŞKENLER

x = 34 · y = 78 · n = 2 · p = 10 · a = 3 · b = 4 · c = 7 · d = 8

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(34, 78)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



4 · 8: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 32.

Adım 3 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

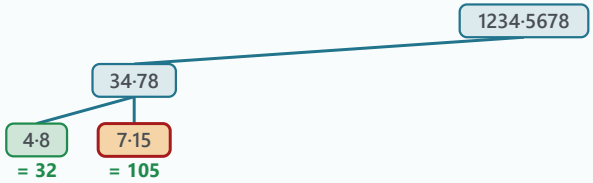
DEĞİŞKENLER

x = 4 y = 8

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(4, 8)
- karatsuba(34, 78)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



7 · 15: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 105.

Adım 4 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

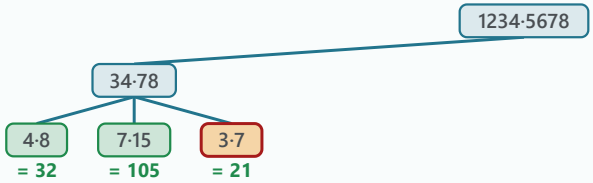
DEĞİŞKENLER

`x = 7` `y = 15`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(7, 15)`
- `karatsuba(34, 78)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



3 · 7: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 21.

Adım 5 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

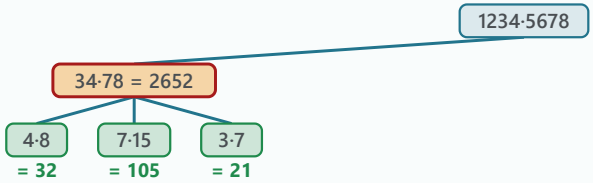
DEĞİŞKENLER

`x = 3` `y = 7`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(3, 7)`
- `karatsuba(34, 78)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



21·100 + (105 − 21 − 32)·10 + 32 = 2100 + 520 + 32 = **2652**.

Adım 6 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
▶    return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

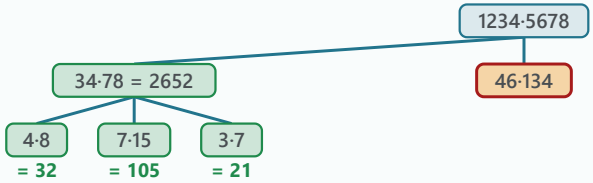
DEĞİŞKENLER

`x = 34` `y = 78` `p = 10` `z0 = 32` `z1 = 105` `z2 = 21`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(34, 78)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



karatsuba(46, 134): n = 3, p = 10 → a = 4, b = 6, c = 13, d = 4. Üç çağrı: (6, 4), (10, 17), (4, 13).

Adım 7 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
▶    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
▶    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
▶    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
▶    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

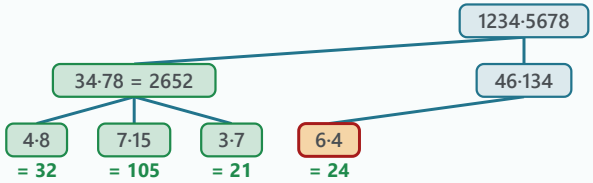
DEĞİŞKENLER

x = 46 | y = 134 | n = 3 | p = 10 | a = 4 | b = 6 | c = 13 | d = 4

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(46, 134)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



6 · 4: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 24.

Adım 8 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

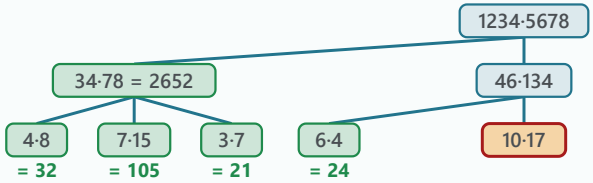
DEĞİŞKENLER

x = 6 y = 4

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(6, 4)
- karatsuba(46, 134)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



karatsuba(10, 17): n = 2, p = 10 → a = 1, b = 0, c = 1, d = 7. Üç çağrı: (0, 7), (1, 8), (1, 1).

Adım 9 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
▶    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
▶    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
▶    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
▶    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

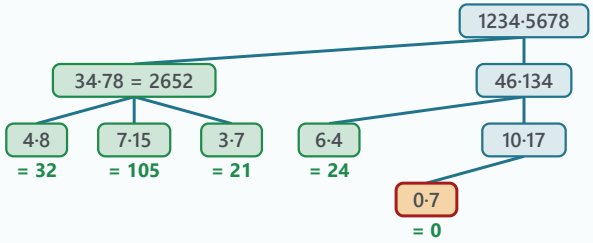
DEĞİŞKENLER

x = 10 · y = 17 · n = 2 · p = 10 · a = 1 · b = 0 · c = 1 · d = 7

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(10, 17)
- karatsuba(46, 134)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



0 · 7: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 0.

Adım 10 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

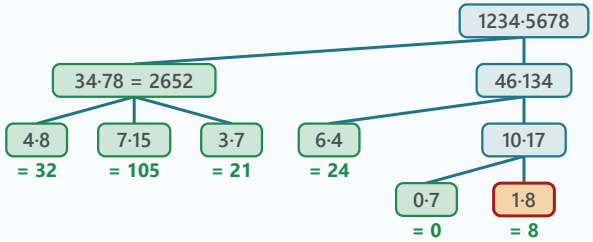
DEĞİŞKENLER

`x = 0` `y = 7`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(0, 7)`
- `karatsuba(10, 17)`
- `karatsuba(46, 134)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



1 · 8: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 8.

Adım 11 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

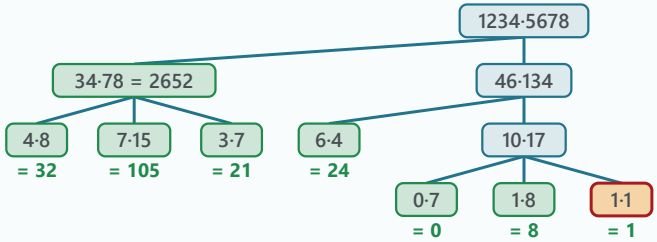
DEĞİŞKENLER

`x = 1` `y = 8`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(1, 8)`
- `karatsuba(10, 17)`
- `karatsuba(46, 134)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



1 · 1: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 1.

Adım 12 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
▶    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

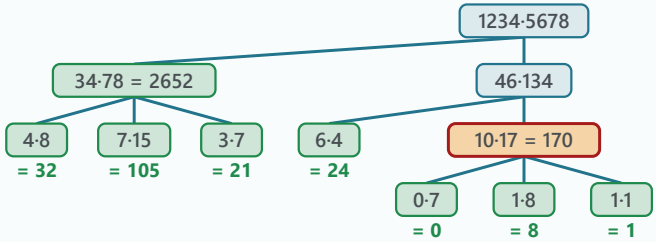
DEĞİŞKENLER

x = 1 y = 1

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(1, 1)
- karatsuba(10, 17)
- karatsuba(46, 134)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



1·100 + (8 − 1 − 0)·10 + 0 = 100 + 70 + 0 = **170**.

Adım 13 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
▶10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

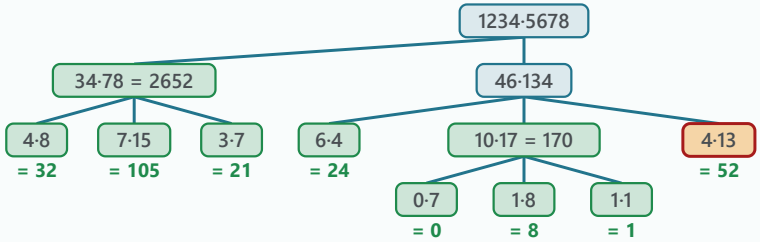
DEĞİŞKENLER

`x = 10` `y = 17` `p = 10` `z0 = 0` `z1 = 8` `z2 = 1`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(10, 17)`
- `karatsuba(46, 134)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



4 · 13: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 52.

Adım 14 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
▶    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

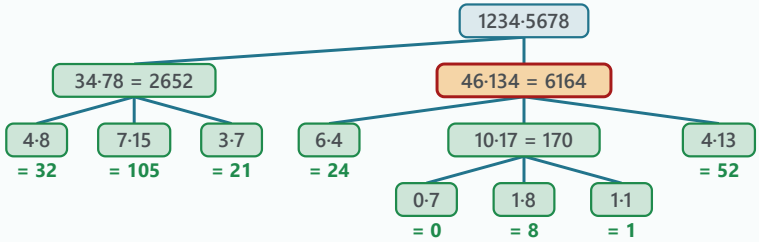
DEĞİŞKENLER

`x = 4` `y = 13`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(4, 13)`
- `karatsuba(46, 134)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



52·100 + (170 − 52 − 24)·10 + 24 = 5200 + 940 + 24 = **6164**.

Adım 15 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
▶    return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

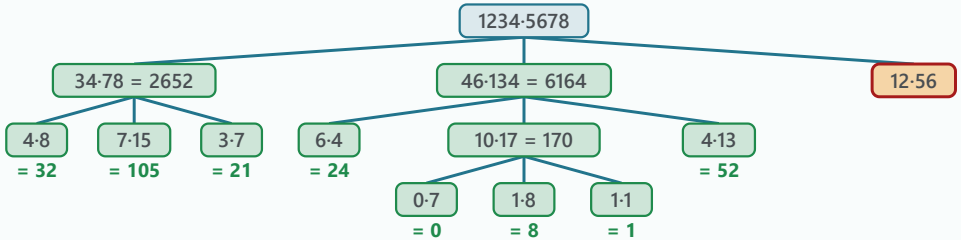
DEĞİŞKENLER

`x = 46` `y = 134` `p = 10` `z0 = 24` `z1 = 170` `z2 = 52`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(46, 134)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



karatsuba(12, 56): n = 2, p = 10 → a = 1, b = 2, c = 5, d = 6. Üç çağrı: (2, 6), (3, 11), (1, 5).

Adım 16 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
▶    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
▶    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
▶    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
▶    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

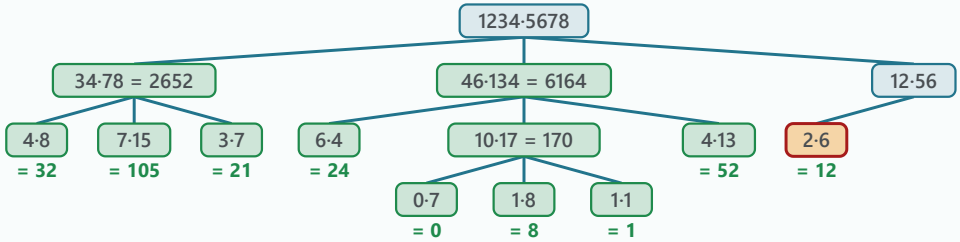
DEĞİŞKENLER

x = 12 | y = 56 | n = 2 | p = 10 | a = 1 | b = 2 | c = 5 | d = 6

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(12, 56)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



2 · 6: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 12.

Adım 17 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
▶    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

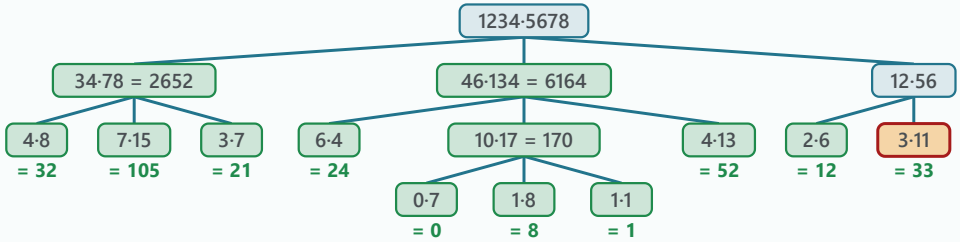
DEĞİŞKENLER

x = 2 y = 6

ÇAĞRI YIĞINI

- karatsuba(2, 6)
- karatsuba(12, 56)
- karatsuba(1234, 5678)
- main()

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



3 · 11: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 33.

Adım 18 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
▶    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

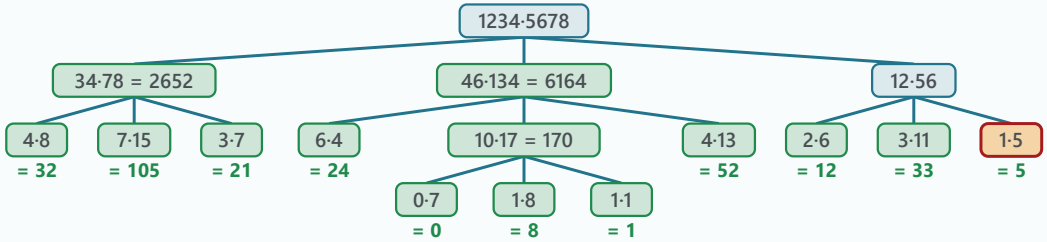
DEĞİŞKENLER

`x = 3` `y = 11`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(3, 11)`
- `karatsuba(12, 56)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



1 · 5: tek basamaklı çarpan var → **taban**, doğrudan 5.

Adım 19 / 21

```
 1 long karatsuba(long x, long y) {
 2   if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
 3   int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
 4   long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
 5   long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
 6   long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
 7   long z0 = karatsuba(b, d);
 8   long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
 9   long z2 = karatsuba(a, c);
10   return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

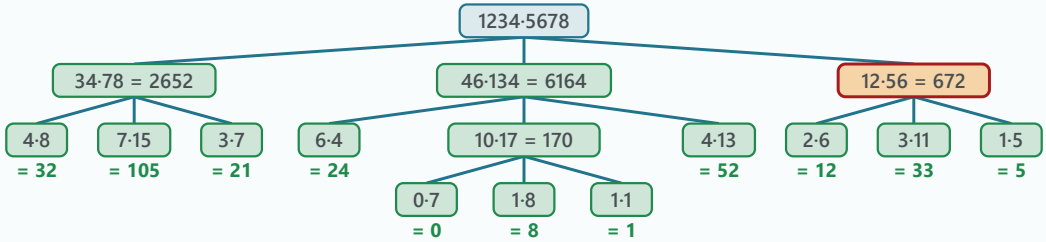
DEĞİŞKENLER

`x = 1` `y = 5`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(1, 5)`
- `karatsuba(12, 56)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



5·100 + (33 − 5 − 12)·10 + 12 = 500 + 160 + 12 = **672**.

Adım 20 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
▶    return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

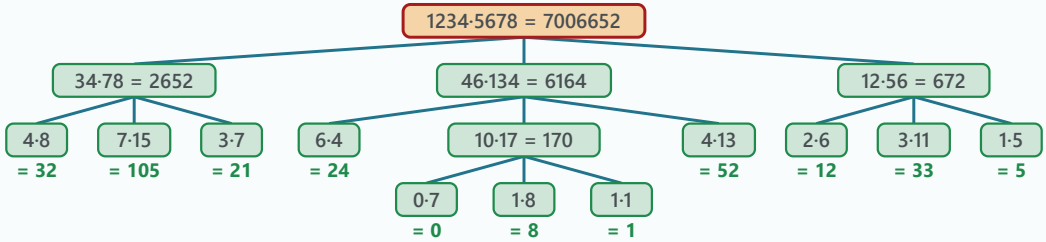
DEĞİŞKENLER

`x = 12` `y = 56` `p = 10` `z0 = 12` `z1 = 33` `z2 = 5`

ÇAĞRI YIĞINI

- `karatsuba(12, 56)`
- `karatsuba(1234, 5678)`
- `main()`

Karatsuba: 1234 · 5678 İzleme



672·10000 + (6164 − 672 − 2652)·100 + 2652 = 6720000 + 284000 + 2652 = **7006652**.

Adım 21 / 21

```
1  long karatsuba(long x, long y) {
2    if (x < 10 || y < 10) return x * y; // taban
3    int n = Math.max(basamak(x), basamak(y));
4    long p = (long) Math.pow(10, n / 2);
5    long a = x / p, b = x % p;   // x = a·p + b
6    long c = y / p, d = y % p;   // y = c·p + d
7    long z0 = karatsuba(b, d);
8    long z1 = karatsuba(a + b, c + d);
9    long z2 = karatsuba(a, c);
▶    return z2 * p * p + (z1 - z2 - z0) * p + z0;
11 }
```

DEĞİŞKENLER

`x = 1234` `y = 5678` `p = 100`

`z0 = 2652` `z1 = 6164` `z2 = 672`

ÇAĞRI YIĞINI

`karatsuba(1234, 5678)`

`main()`

Karatsuba Analizi

- T(n) = 3T(n/2) + O(n) → durum 1 → $\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1,585})$.
- Toplama, çıkarma ve 10^m ile kaydırma O(n); çarpım sayısını 4'ten 3'e indirmek üssü 2'den 1,585'e düşürür.
- Örnekte 16 çağrı, 11 taban çarpımı (okul yöntemi 16 tek basamaklı çarpım).
- Küçük sayılarda ek toplamalar yüzünden yavaştır → bir **eşik** altında okul yöntemi.
- Java `BigInteger.multiply` büyük sayılarda Karatsuba ve Toom-Cook kullanır. Daha hızlıları: Schönhage–Strassen O(n log n log log n), Harvey–van der Hoeven O(n log n) (2019).

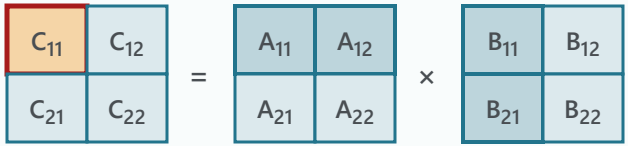
n (basamak)	n^2	$n^{1,585}$	oran
10	100	38	2,6×
100	10.000	1.479	6,8×
1.000	$1{,}0 \cdot 10^6$	56.871	17,6×
10.000	$1{,}0 \cdot 10^8$	$2{,}2 \cdot 10^6$	45,7×
$1{,}0 \cdot 10^6$	$1{,}0 \cdot 10^{12}$	$3{,}2 \cdot 10^9$	309,2×

Matris Çarpımı: Klasik ve Blok

Klasik: $\Theta(n^3)$

```
for (int i = 0; i < n; i++)
  for (int j = 0; j < n; j++)
    for (int k = 0; k < n; k++)
      C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
```

n^2 hücrenin her biri n çarpım → n^3 çarpım.



C11 = A11·B11 + A12·B21: 2 blok çarpımı

Blok böl ve fethet

A, B ve C, n/2 × n/2'lik dört bloğa bölünür:

C11 = A11·B11 + A12·B21
C12 = A11·B12 + A12·B22
C21 = A21·B11 + A22·B21
C22 = A21·B12 + A22·B22

8 blok çarpımı + 4 blok toplamı: $T(n) = \mathbf{8}T(n/2) + \Theta(n^2) \rightarrow n^{\log_2 8} = \mathbf{\Theta(n^3)}$. Sadece bölmek yetmez; çarpım sayısı azaltılmalı.

Strassen (1969): 8 Yerine 7 Çarpım

Çarpım	Tanım
P1	A11 · (B12 − B22)
P2	(A11 + A12) · B22
P3	(A21 + A22) · B11
P4	A22 · (B21 − B11)
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)

Sonuç blokları
C11 = P5 + P4 − P2 + P6
C12 = P1 + P2
C21 = P3 + P4
C22 = P5 + P1 − P3 − P7

7 çarpım + 18 blok toplama/çıkarma. Bloklar da Strassen ile özyinelemeli çarpılır; taban 1×1.

C22'de P7 **çıkarılır**. "+ P7" yazılırsa program hata vermeden yanlış matris üretir; bu hata, uygulamanın küçük bir örnekte klasik yöntemle karşılaştırılmasıyla yakalanır.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

P1	A11 · (B12 − B22)	1 · (8 − 2)	**6**
P2	(A11 + A12) · B22	…	
P3	(A21 + A22) · B11	…	
P4	A22 · (B21 − B11)	…	
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)	…	
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)	…	
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)	…	

P1 = 1 · (8 − 2) = **6**.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

P1	A11 · (B12 − B22)	1 · (8 − 2)	**6**
P2	(A11 + A12) · B22	(1 + 3) · 2	**8**
P3	(A21 + A22) · B11	…	
P4	A22 · (B21 − B11)	…	
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)	…	
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)	…	
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)	…	

P2 = (1 + 3) · 2 = **8**.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

P1	A11 · (B12 − B22)	1 · (8 − 2)	**6**
P2	(A11 + A12) · B22	(1 + 3) · 2	**8**
P3	(A21 + A22) · B11	(7 + 5) · 6	**72**
P4	A22 · (B21 − B11)	…	
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)	…	
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)	…	
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)	…	

P3 = (7 + 5) · 6 = **72**.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

P1	A11 · (B12 − B22)	1 · (8 − 2)	**6**
P2	(A11 + A12) · B22	(1 + 3) · 2	**8**
P3	(A21 + A22) · B11	(7 + 5) · 6	**72**
P4	A22 · (B21 − B11)	5 · (4 − 6)	**−10**
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)	…	
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)	…	
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)	…	

P4 = 5 · (4 − 6) = **−10**.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

P1	A11 · (B12 − B22)	1 · (8 − 2)	**6**
P2	(A11 + A12) · B22	(1 + 3) · 2	**8**
P3	(A21 + A22) · B11	(7 + 5) · 6	**72**
P4	A22 · (B21 − B11)	5 · (4 − 6)	**−10**
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)	(1 + 5) · (6 + 2)	**48**
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)	…	
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)	…	

P5 = (1 + 5) · (6 + 2) = **48**.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

P1	A11 · (B12 − B22)	1 · (8 − 2)	**6**
P2	(A11 + A12) · B22	(1 + 3) · 2	**8**
P3	(A21 + A22) · B11	(7 + 5) · 6	**72**
P4	A22 · (B21 − B11)	5 · (4 − 6)	**−10**
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)	(1 + 5) · (6 + 2)	**48**
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)	(3 − 5) · (4 + 2)	**−12**
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)	…	

P6 = (3 − 5) · (4 + 2) = **−12**.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

P1	A11 · (B12 − B22)	1 · (8 − 2)	**6**
P2	(A11 + A12) · B22	(1 + 3) · 2	**8**
P3	(A21 + A22) · B11	(7 + 5) · 6	**72**
P4	A22 · (B21 − B11)	5 · (4 − 6)	**−10**
P5	(A11 + A22) · (B11 + B22)	(1 + 5) · (6 + 2)	**48**
P6	(A12 − A22) · (B21 + B22)	(3 − 5) · (4 + 2)	**−12**
P7	(A11 − A21) · (B11 + B12)	(1 − 7) · (6 + 8)	**−84**

P7 = (1 − 7) · (6 + 8) = **−84**.

Strassen Adım Adım: 2 × 2 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

C11 = P5 + P4 − P2 + P6	48 + (−10) − 8 + (−12)	**18**
C12 = P1 + P2	6 + 8	**14**
C21 = P3 + P4	72 + (−10)	**62**
C22 = P5 + P1 − P3 − P7	48 + 6 − 72 − (−84)	**66**

C = [[18, 14], [62, 66]]. Kontrol: 1·6 + 3·4 = 18, 7·8 + 5·2 = 66 ✓. 7 çarpım kullanıldı (klasik 8).

STRASSEN ÇARPIMI

Strassen Analizi ve Pratik

- $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$ → durum 1 → $\mathbf{\Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2{,}807})}$.
- $n = 2^k$ için skaler çarpım: $\mathbf{7^k}$ (klasik 8^k). $n = 1024$: $7^{10} \approx 2{,}8 \cdot 10^8$, $8^{10} \approx 1{,}07 \cdot 10^9$ → yaklaşık **3,8 kat** az.
- n 2'nin kuvveti değilse matris sıfırlarla **doldurulur** (padding).
- **Eşik:** 18 ek toplama ve geçici matrisler yüzünden küçük n'de yavaş; kütüphaneler $n \lesssim 64$–128'de klasik yönteme geçer.
- **Sayısal kararlılık:** kayan noktalı sayılarda çıkarma işlemleri hatayı büyütebilir.
- **Bellek:** her düzeyde geçici bloklar → ek $O(n^2)$.
- Kuramsal rekor $\omega < 2{,}372$ (2024); sabitler çok büyük, pratikte kullanılmaz.

Ders: çarpımı toplamalarla takas etmek, **a**'yı bir azaltarak üssü düşürür. Aynı fikir Karatsuba'da 4 → 3, Strassen'de 8 → 7.

DEĞERLENDİRME

Saf Yöntem ve Böl ve Fethet

Problem	Saf yöntem	Böl ve fethet	Bağıntı
Sıralama	$O(n^2)$ (kabarcık)	$O(n \log n)$	$2T(n/2) + n$
Sıralı dizide arama	$O(n)$	$O(\log n)$	$T(n/2) + 1$
Üs alma x^n	$O(n)$ çarpım	$O(\log n)$	$T(n/2) + 1$
Dışbükey örtü	$O(n^3)$	ort. $O(n \log n)$	$T(n_1) + T(n_2) + n$
En yakın nokta çifti	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$2T(n/2) + n$
Tam sayı çarpımı	$O(n^2)$	$O(n^{1,585})$	$3T(n/2) + n$
Matris çarpımı	$O(n^3)$	$O(n^{2,807})$	$7T(n/2) + n^2$

Kazancın kaynağı: ya iş dengeli bölünüp her düzey O(n)'de birleştiriliyor (sıralama, en yakın çift) ya da alt problem sayısı azaltılıyor (Karatsuba, Strassen) ya da yarısı atılıyor (arama, üs).

Özet

Konu	Hatırlanacaklar
Paradigma	böl → (parçala) → yönet → birleştir; bağımsız, aynı türden alt problemler; taban durumu şart
Analiz	$T(n) = aT(n/b) + f(n)$; özyineleme ağacı; ana teorem: $f(n)$'yi $n^{\log_b a}$ ile karşılaştır
Temel örnekler	ikili arama ve hızlı üs $O(\log n)$; birleştirme sıralaması $O(n \log n)$; hızlı sıralama ort. $O(n \log n)$, en kötü $O(n^2)$
Quickhull	A, B uçlar; en uzak C (max capraz); üçgen içi elenir; ort. $O(n \log n)$, en kötü $O(n^2)$
En yakın çift	x'e göre böl; $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$; 2δ şeritte ≤ 7 komşu; $O(n \log n)$
Karatsuba	$ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$; 3 çarpım → $O(n^{1,585})$
Strassen	7 blok çarpımı → $O(n^{2,807})$; $C22 = P5 + P1 - P3 - P7$

ÖZET

Etkileşimli Simülatörler

Özyineleme ve Ana Teorem

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$ biçimindeki bağıntıların özyineleme ağacını düzey düzey çizer ve ana teorem durumunu belirler.

Sıralama Algoritmaları

Birleştirme sıralaması ve hızlı sıralama dahil on sıralama algoritmasını adım adım görselleştirir.

ÖZET

Sık Yapılan Hatalar

Taban durumunu unutmak

Ya da hiç ulaşılamayan bir taban yazmak: sonsuz özyineleme, `StackOverflowError`. Karatsuba'da `x < 10 || y < 10`.

Dengesiz bölme

Sıralı dizide son öğe pivot ya da Quickhull'da her adımda tek nokta: $T(n) = T(n - 1) + n = O(n^2)$.

Örtüşen alt problemler

Fibonacci'yi düz özyinelemeyle hesaplamak üstel süre alır; sonuçları saklayan dinamik programlama gerekir.

Birleştirme maliyetini küçümsemek

Şeridi her çağrıda sıralamak $O(n \log^2 n)$ yapar; $2T(n/2) + n \log n \neq \Theta(n \log n)$.

Ana teoremi yanlış yerde kullanmak

$T(n) = T(n - 1) + n$, eşit olmayan bölmeler veya $f(n) = n/\log n$ için geçerli değildir.

İşaret hatası

Strassen'de $C22 = P5 + P1 - P3 - P7$; tek işaret hatası hata vermeden yanlış matris üretir. Küçük bir örnekte klasik yöntemle karşılaştırma bu hatayı yakalar.

ÖZET

Örnek Problemler

1. $T(n) = 4T(n/2) + n$ bağıntısını ana teoremle çözün.
2. $T(n) = 2T(n/2) + n^2$ bağıntısını çözün; düzenlilik koşulunu kontrol edin.
3. Karatsuba ile $21 \cdot 43$'ü hesaplayın ($m = 1$).
4. $A = (0,0)$, $B = (10,0)$. $P = (3,4)$, $Q = (5,-2)$, $R = (7,6)$ için capraz(A, B, ·) değerlerini bulun. Quickhull üst kümede hangi noktayı seçer?
5. `us(3, 10)` kaç çarpım yapar? Saf yöntemle karşılaştırın.
6. [5, 1, 4, 2, 3] dizisini birleştirme sıralamasıyla sıralarken son birleştirmede hangi iki sıralı dizi birleşir?

▶ **Cevapları göster**

ÖZET

Alıştırmalar

1. Dizinin en büyük öğesini böl ve fethet ile bulun; bağıntıyı çözün.
2. Birleştirme sıralamasını değiştirip **ters çiftleri** (i < j, a[i] > a[j]) sayın. [2, 4, 1, 3, 5] için sonuç?
3. **En büyük toplamlı alt dizi**: [−2, 1, −3, 4, −1, 2, 1, −5, 4] için böl ve fethet çözümü ve süresi.
4. A = [[1, 2], [3, 4]], B = [[5, 6], [7, 8]] çarpımını Strassen ile hesaplayın; C22'yi ± P7 ile deneyin.
5. Quickhull için $O(n^2)$ süren bir girdi tarif edin.
6. En yakın çift algoritmasında taban durumu n ≤ 3 yerine n ≤ 1 olsaydı ne değişirdi?

▶ **Cevaplar / ipuçları**

ÖZET

Kaynaklar

- Cormen, Leiserson, Rivest ve Stein, *Introduction to Algorithms*, 4. baskı, 2022 (Bölüm 4: Böl ve fethet; Bölüm 33: Hesaplamalı geometri).
- Kleinberg ve Tardos, *Algorithm Design*, 2005 (Bölüm 5: Divide and Conquer).
- Sedgewick ve Wayne, *Algorithms*, 4. baskı, 2011.
- Barber, Dobkin ve Huhdanpaa, "The Quickhull Algorithm for Convex Hulls", *ACM TOMS* 22(4), 1996.
- Karatsuba ve Ofman, "Multiplication of Multidigit Numbers on Automata", 1962; Strassen, "Gaussian Elimination is not Optimal", *Numerische Mathematik* 13, 1969.

Son

Bölüm 1: Böl ve Fethet Yaklaşımı

Sonraki bölüm: Bölüm 2: Açgözlü Algoritmalar · Terim sözlüğü